Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις - Λύσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

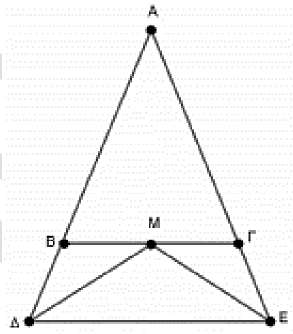
Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Θέμα 2ο

12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

Λύση

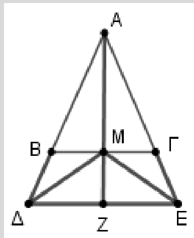


α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ (Μ μέσο του ΒΓ)
- ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση)
- $\hat{\Delta B M} = \hat{E \Gamma M}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β, Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα έχουν και ΜΔ = ΜΕ, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΕ.

12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.
γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.



Λύση

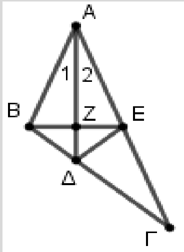
α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ (Μ μέσο του ΒΓ)
- ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση)
- $\hat{\Delta B M} = \hat{E \Gamma M}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β, Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα έχουν και ΜΔ = ΜΕ, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΕ.

γ) Είναι ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ = ΓΕ, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:
$AB + B\Delta = A\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow A\Delta = AE$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας Α. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $AZ \perp \Delta E$.

12705.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) ΔΒ = ΔΕ.

γ) $AZ \perp BE$

Λύση

α) Επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος, το Ε είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $AE = \frac{A\Gamma}{2}$ (1). Από την υπόθεση είναι $A\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{A\Gamma}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$

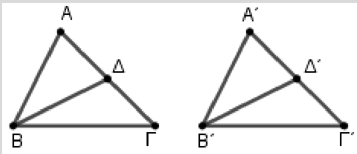
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΕ από το α σκέλος
- $A_1 = A_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α
- την πλευρά ΑΔ κοινή

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες A_1, A_2 έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή ΔΒ = ΔΕ.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του. Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος , άρα $AZ \perp BE$.

13518.Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄.
Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{A} = \hat{A}'$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Λύση

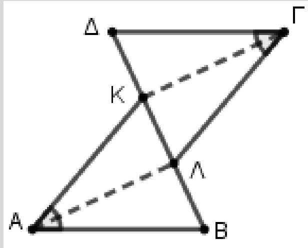
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:
- ΒΔ = Β΄Δ΄, από υπόθεση,
- ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,
- ΑΔ = Α΄Δ΄, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄ αντίστοιχα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα $A = A'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και Β΄Δ΄ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
- ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,
- ΑΓ = Α΄Γ΄, από υπόθεση,
- $A = A'$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

13826. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν
ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ.
β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:
i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ έχουν:
- ΑΒ = ΓΛ από την υπόθεση
- ΑΚ = ΓΔ από την υπόθεση και
- $\mathrm{A} = \Gamma$ από την υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΚ = ΔΛ, γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Α και Γ.

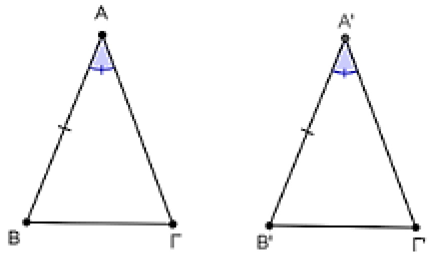
β) i. Αφού Λ και Κ είναι μέσα των ΒΚ και ΓΔ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι ΒΛ = ΛΚ και ΛΚ = ΚΔ, οπότε θα είναι ΒΛ = ΛΚ = ΚΔ.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΔ = ΓΛ και Λ, Κ τα μέσα των βάσεων τους ΒΚ, ΔΛ αντίστοιχα, τότε τα ΑΛ και ΓΚ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, οπότε είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή το ΑΛ είναι κάθετο στο ΒΚ και το ΓΚ είναι κάθετα στο ΔΛ. Επομένως οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ .

34493. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma)$ και Α΄Β΄Γ΄ $(\mathrm{A'B'} = \mathrm{A'}\Gamma')$.
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A'}\Gamma'$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

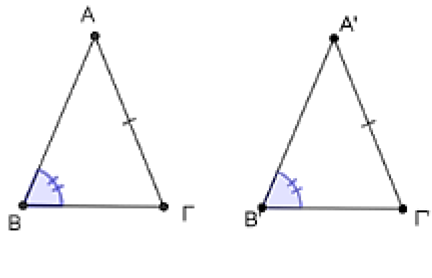
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, τότε αν $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, θα είναι $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'} = \mathrm{A'}\Gamma'$.Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
1) $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$
2) $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A'}\Gamma'$ και
3) $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$, άρα με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

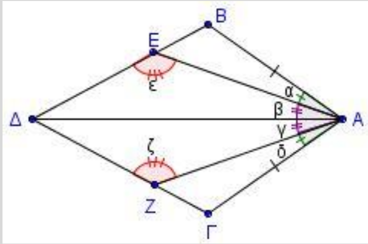


β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΒΓ και Β΄Γ΄ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες, δηλαδή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}' = \hat{\mathrm{B}}'$. Όμως $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, άρα $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}' = \hat{\Gamma}'$.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
1) $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A'}\Gamma'$
2) $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ και
3) $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$ γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}' = \hat{\Gamma}'$ (έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων είναι ίσες)

Άρα με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



34511. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$, $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$ και $AB=A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες



Λύση

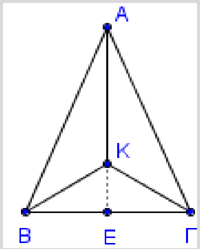
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:
- $AB=A\Gamma$
- την πλευρά ΑΔ κοινή και
- $B\hat{A}\Delta=\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\delta}+\hat{\gamma}=\Gamma\hat{A}\Delta$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΔΑ έχουν
- την πλευρά ΑΔ κοινή
- $E\hat{\Delta}A=A\hat{\Delta}Z$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα και
- $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$ (υπόθεση)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{\varepsilon}=\hat{\zeta}$

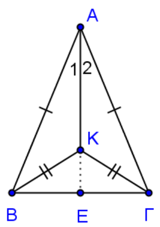
34773. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB=K\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.
ii. η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.
γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:
- την πλευρά ΑΚ κοινή
- $AB=A\Gamma$ και
- $KB=K\Gamma$.

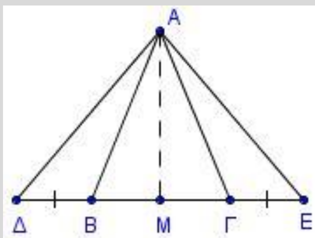
-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, άρα η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

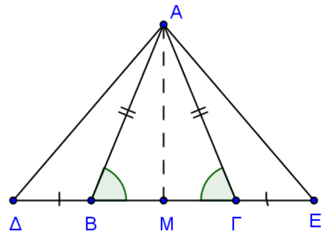
γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΕ θα είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα η ΚΕ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.

34774. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και ΑΜ η διάμεσός του. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Gamma}E$.
β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
γ) η ΑΜ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Είναι
$B_{\varepsilon\xi} = 180^{\circ} - B = 180^{\circ} - \Gamma = \Gamma_{\varepsilon\xi}$

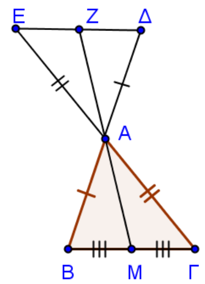


β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $AB = A\Gamma$
2) $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ και
3) $B\Delta = \Gamma E$
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$, είναι και $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow \Delta M = ME$, άρα το Μ είναι μέσο του ΔΕ, οπότε η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΕ.

34780. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.
ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$.

Λύση



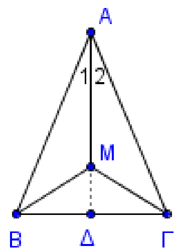
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:
1) $A\Delta = AB$
2) $AE = A\Gamma$
3) $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$ ως κατακορυφήν
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ έχουν:
1) $A\Delta = AB$
2) $B\hat{A}M = \Delta\hat{A}Z$ ως κατακορυφήν και
3) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα έχουν και $\Delta Z = BM$. Όμως $BM = \frac{AB}{2}$ και $AB = \Delta E$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, άρα $\Delta Z = \frac{\Delta E}{2}$.

34784. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα.
β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.

Λύση

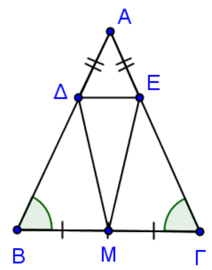


α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ έχουν:
1) την πλευρά ΑΚ κοινή
2) $AB = A\Gamma$ και
3) $MB = M\Gamma$.
Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, άρα είναι ύψος και διάμεσος του.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ, η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΚΓ.

36099. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

Λύση



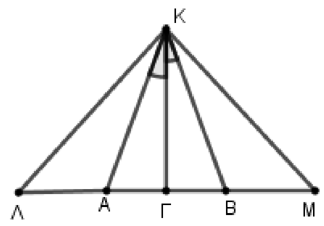
α) Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$, είναι και $ΑΒ - ΑΔ = ΑΓ - ΑΕ \Leftrightarrow ΒΔ = ΓΕ$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΕ$
2) $ΒΜ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $\hat{B} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

36100. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$.Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.
β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ .

Λύση

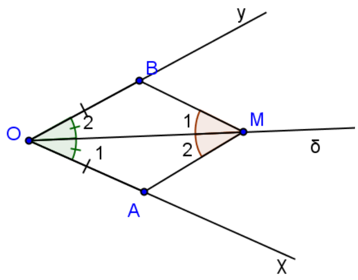
α) Τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ έχουν:
1) ΚΑ = ΚΒ (υπόθεση)
2) ΑΛ = ΝΒΜ (υπόθεση)
3) $Κ\hat{Α}Λ = Κ\hat{Β}Μ$ (παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Α, Β του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ)
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και
ΚΛ = ΚΜ, οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές .



β) Η ΚΓ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ, οπότε είναι και διάμεσός του, δηλαδή ΓΑ= ΓΒ (1). Επειδή τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ είναι ίσα, έχουν και ΑΛ = ΒΜ (2).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι ΓΛ = ΓΜ, άρα η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ .

36104. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Oy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΑ = ΜΒ$
β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

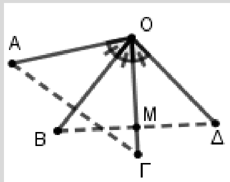
Λύση



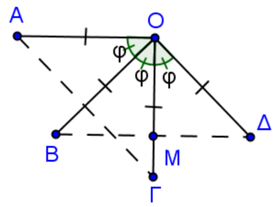
α) Τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ έχουν:
1) Την πλευρά ΟΜ κοινή
2) $OA = OB$ και
3) $O_1 = O_2$ γιατί η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MA = MB$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα, έχουν και $M_1 = M_2$, άρα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

36110. Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$,τότε να αποδείξετε ότι:
α) $A\Gamma = B\Delta$
β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.



Λύση



α) Έστω ότι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \hat{\varphi}$.
Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:
1) $OA = OB$
2) $O\Gamma = O\Delta$ και
3) $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta = 2\hat{\varphi}$
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Gamma = B\Delta$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΔ.

36170. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ
αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
α) $BE = \Gamma\Delta$ **β)** $B\Delta = \Gamma E$ **γ)** $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

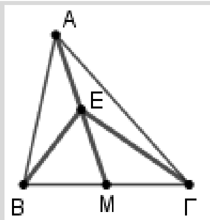
Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AE = A\Delta$ είναι και
$AB + AE = A\Gamma + A\Delta \Leftrightarrow BE = \Gamma\Delta$

β) Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή
2) $BE = \Gamma\Delta$
3) $EB\Gamma = \Delta\Gamma B$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$.

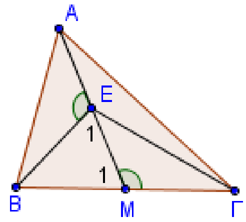
36333. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ.
Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:
α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$.
β) $AB = E\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2BE}{2} = BE$, άρα το τρίγωνο BEM είναι ισοσκελές με βάση την EM και έχει $E_1 = M_1$.

Όμως $AEB = 180^\circ - E_1$ και $EM\Gamma = 180^\circ - M_1$, άρα $AEB = EM\Gamma$.

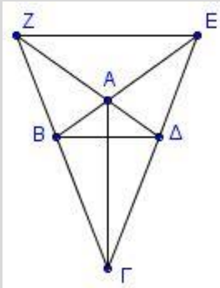


β) Τα τρίγωνα AEB και EMΓ έχουν:
1) $AE = EM$ γιατί το E είναι μέσο του AM
2) $BE = BM = M\Gamma$ και
3) $AEB = EM\Gamma$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = E\Gamma$.

Θέμα 4ο

14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$.
Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:
α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.
β) $\Gamma Z = \Gamma E$.
γ) $EZ \parallel B\Delta$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:
1) $AB = A\Delta$
2) $\Gamma B = \Gamma\Delta$ και
3) τη πλευρά ΓΑ κοινή, άρα

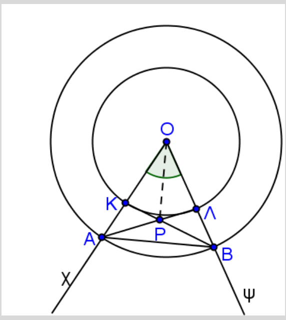
από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Gamma A = A\Gamma\Delta$, $BA\Gamma = \Delta A\Gamma$.
Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

β) Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:
1) τη πλευρά ΑΓ κοινή
2) $B\Gamma A = A\Gamma\Delta$ και
3) $ZA\Gamma = EA\Gamma$ γιατί $ZAB = EA\Delta$ ως κατακορυφήν και $BA\Gamma = \Delta A\Gamma$

Άρα λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $\Gamma Z = \Gamma E$.

γ) Επειδή τα Α,Γ ισαπέχουν από τα Β και Δ, ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΒΔ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ, όποτε είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Επειδή $\Gamma A \perp B\Delta$ και $\Gamma A \perp EZ$, είναι $EZ \parallel B\Delta$.

37095. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K,A και την Oψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\Lambda = BK$.
β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ.
γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}\psi$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

1) $OA = OB = \rho_2$
2) $OK = O\Lambda = \rho_1$ και
3) τη γωνία O κοινή

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Lambda = BK$.

β) Επειδή $OA = OB$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, άρα $OAB = OBA$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, ισχύει ότι: $OA\Lambda = OBK$ (2)

Από (1)-(2) έχουμε: $OAB - OA\Lambda = OBA - OBK \Leftrightarrow PAB = PBA$, οπότε το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.

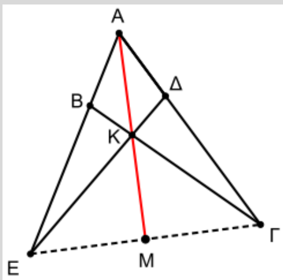
γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

1) $OA = OB$
2) τη πλευρά ΟΡ κοινή και
3) $PA = PB$(τρίγωνο ΑΡΒ ισοσκελές)

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα οπότε έχουν και $AOP = BOP$, δηλαδή η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $xO\psi$.

37124. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ.
Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.
Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$.
β) $BK = K\Delta$.
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.
δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΕΑΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ=ΑΓ) οπότε $A\hat{E}M = A\hat{\Gamma}E$ (1).
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ, έχουν :

i) ΕΓ κοινή
ii) ΒΕ=ΔΓ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα)
iii) $A\hat{E}M = A\hat{\Gamma}E$ από τη σχέση (1)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα οπότε έχουν και ΒΓ=ΔΕ

β) Το τρίγωνο ΕΚΓ είναι ισοσκελές($\Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}E$ από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΓ και ΔΕΓ) οπότε ΕΚ=ΚΓ (2)
Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:

i) ΕΚ=ΚΓ (από τη σχέση (2))
ii) ΒΕ=ΔΓ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ,ΑΒ και ΑΓ,ΑΔ αντίστοιχα)
iii) $B\hat{E}K = \Delta\hat{\Gamma}K$ (Διαφορές των ίσων γωνιών $B\hat{E}\Gamma, K\hat{E}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E, K\hat{\Gamma}E$ αντίστοιχα)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΚ=ΚΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ έχουν τρείς πλευρές ίσες μία προς μία (ΒΚ=ΚΔ,ΑΚ κοινή και ΑΒ=ΑΔ) άρα είναι ίσα. Επομένως $B\hat{A}K = K\hat{A}\Delta$ οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

δ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

Θέμα 3ο

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα.

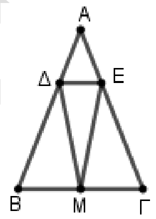
ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες.

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

Λύση



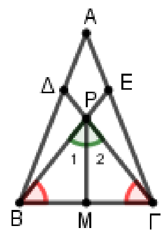
α) i. Επειδή ΔΒ = 2ΑΔ, είναι $A\Delta=\frac{1}{3}AB$ και $\Delta B=\frac{2}{3}AB$.

Επειδή ΕΓ= 2ΑΕ είναι $AE=\frac{1}{3}A\Gamma$ και $E\Gamma=\frac{2}{3}A\Gamma$.

Επειδή ΑΒ = ΑΓ είναι και ΔΒ = ΕΓ.

ii. Τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΕΜΓ έχουν:
- ΔΒ = ΕΓ
- ΜΒ = ΜΓ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΕΜΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΔΜ = ΕΜ. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.



β) i. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν:
- ΒΓ πλευρά κοινή
- ΔΒ = ΕΓ
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$

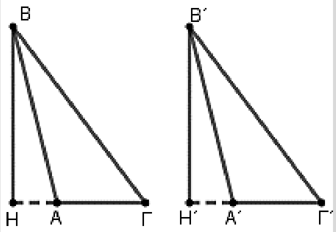
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα οπότε έχουν και $\Gamma\hat{B}E=B\hat{\Gamma}\Delta$.

ii. Επειδή $\Gamma\hat{B}E=B\hat{\Gamma}\Delta$, το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ. Επειδή η ΡΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ, είναι και διχοτόμος του τριγώνου, δηλαδή το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θέμα 2ο

12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A} > 90^\circ\right)$ και Α΄Β΄Γ΄ $\left(\hat{A}' > 90^\circ\right)$ με γ = γ΄ και β = β΄.
Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:
α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

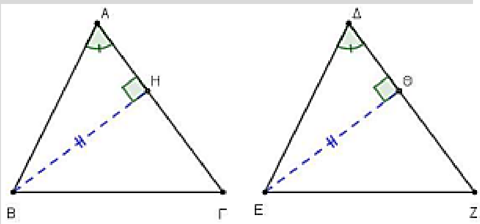


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄ έχουν:
- ΒΗ = Β΄Η΄, από υπόθεση
- γ = γ΄, από υπόθεση
Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ίσες, δηλαδή $BAH = B'A'H'$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
- γ = γ΄, από υπόθεση
- β = β΄, από υπόθεση
- $BA\Gamma = B'A'\Gamma'$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών BAH και $B'A'H'$.
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = ΔΕ.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .

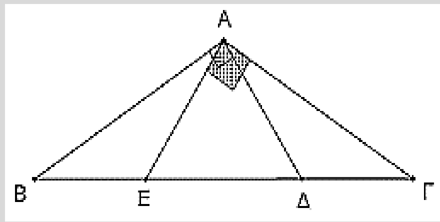


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ έχουν:
- ΒΗ = ΕΘ από την υπόθεση,
- $ABH = AE\Theta$ γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους είναι ίσες
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ (1).

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:
- ΑΒ =ΔΕ, από (1),
- $A = \Delta$ υπόθεση
- $AB\Gamma = \Delta EZ$ υπόθεση.
Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) ΒΕ = ΓΔ.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ υπόθεση
- $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

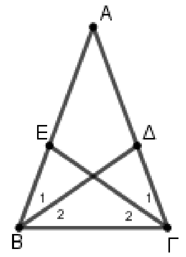
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\hat{B},\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

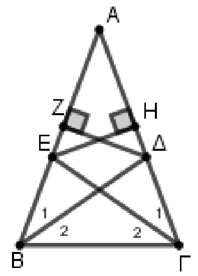
γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε ότι ΒΔ = ΓΕ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $B\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}E$ αντίστοιχα.
Λόγω της (1) είναι ΒΕ = ΒΔ − ΔΕ = ΓΕ − ΔΕ = ΓΔ.

34387. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.
β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες από τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα στη ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι ΕΗ = ΔΖ.

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΓ κοινή
2) $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
3) $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$ γιατί είναι μισά ίσων γωνιών.
Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΓΠΓ τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΖΔ έχουν τη γωνία Α κοινή και τις πλευρές ΑΕ και ΑΔ ίσες γιατί $AB=A\Gamma$ και ΒΕ = ΓΔ από τη προηγούμενη σύγκριση, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι
ΑΕ = ΑΔ.
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία τους γωνία ίση, οπότε είναι ίσα. Κατά συνέπεια έχουν και ΕΗ = ΔΖ.

34401. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.
β) $A\Delta=AE$.

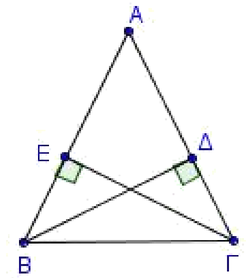
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

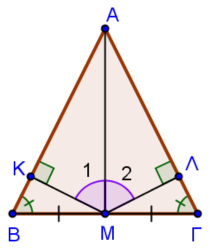
Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, έχουν και $BE = \Gamma\Delta$.
Όμως είναι $AB = A\Gamma$,άρα είναι και $AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta$.

34404. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $MK = M\Lambda$.
β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:

1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και

2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = M\Lambda$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:

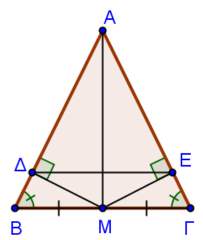
1) την πλευρά ΑΜ κοινή και

2) $MK = M\Lambda$,

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_1 = M_2$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

34405. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $M\Delta = ME$.
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και

2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = ME$.

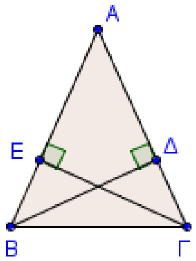
β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta B = E\Gamma$.
Όμως $AB = A\Gamma$, άρα και $AB - \Delta B = A\Gamma - E\Gamma \Leftrightarrow A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

34496. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

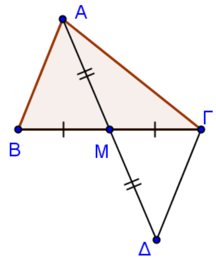
2) $B=\Gamma$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αφού έχει $AB=A\Gamma$
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta=\Gamma E$.



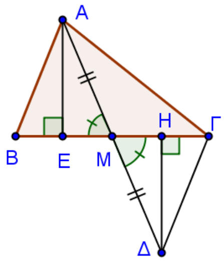
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $B\Delta=\Gamma E$
Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B=\Gamma$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $AB=A\Gamma$.

34497. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.
β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

Λύση



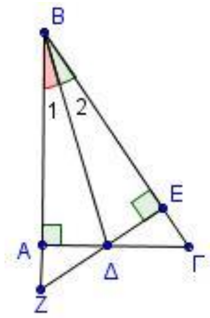
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:
1) $AM=M\Delta$
2) $BM=M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $AMB=\Delta M\Gamma$ ως κατακορυφήν
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Έστω ΑΕ και ΔΗ οι αποστάσεις των Α,Δ από τη ΒΓ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ έχουν:
1) $AM=M\Delta$
2) $AMB=\Delta M\Gamma$
Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου τριγώνου είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE=\Delta H$.

34499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $\Delta E\perp B\Gamma$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:
α) $AB=BE$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

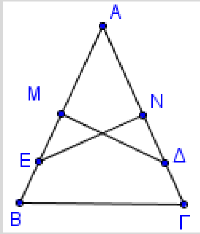
Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΔ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΔ κοινή
2) $B_1=B_2$ λόγω της διχοτόμησης
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα, κατά συνέπεια έχουν και $AB=BE$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν:
1) Τη γωνία Β κοινή
2) $AB=BE$
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

36329. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$.

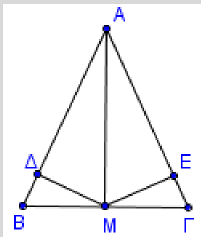


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:
1) $ΜΔ = ΜΕ$ και
2) τη γωνία Α κοινή, άρα
έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν
$ΑΜ = ΑΝ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:
1) $ΑΜ = ΑΝ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και
2) τη γωνία Α κοινή, άρα
έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΜΔ = ΜΕ$.

36330. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν είναι $ΜΔ = ΜΕ$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα.
β) Αν είναι $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$.

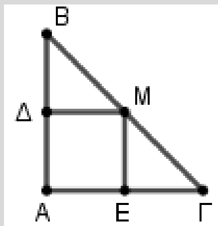


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:
1) την πλευρά ΜΑ κοινή και
2) $ΜΔ = ΜΕ$, δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα.

β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:
1) $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και
2) $ΜΒ = ΜΓ$, γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ
Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΜΔ = ΜΕ$.

36331. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:
i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.
ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ.



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- ΜΔ = ΜΕ

- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.

ii. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\mathrm{B}=\Gamma$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΔ και ΜΕ. Άρα ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

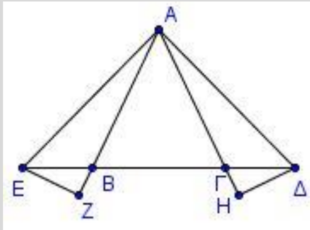
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ
- $\mathrm{B}=\Gamma$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΜΔ = ΜΕ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Γ .

36332. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$.
Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\mathrm{BE}$.
Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

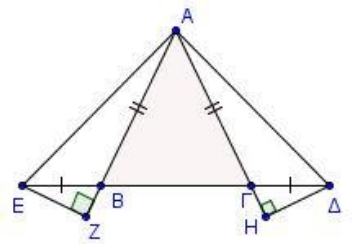
α) $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$

β) $\mathrm{EZ}=\Delta\mathrm{H}$



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
1) $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$
2) $\Gamma\Delta=\mathrm{BE}$ και
3) $\mathrm{ABE}=\mathrm{A}\Gamma\Delta$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$.



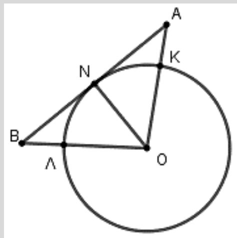
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ έχουν:
1) $\Gamma\Delta=\mathrm{BE}$ και
2) $\mathrm{EBZ}=\Delta\Gamma\mathrm{H}$ κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $\mathrm{EZ}=\Delta\mathrm{H}$.

36344. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.



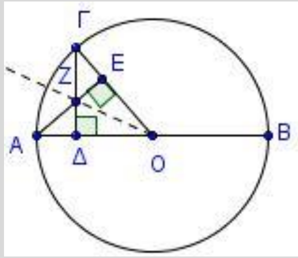
Λύση

α) Επειδή η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, ισχύει ότι $\mathrm{AB}\perp\mathrm{ON}$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΝ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Η ΟΝ εκτός από ύψος και διάμεσος είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΟΑ, άρα $\mathrm{BON}=\mathrm{NOA}$.

Επειδή σε ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα, είναι $\mathrm{KN}=\mathrm{N}\Lambda$, οπότε το Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.

36345. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.
β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

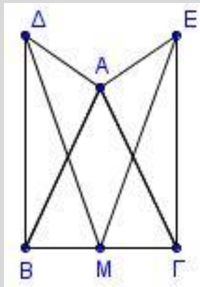


Λύση

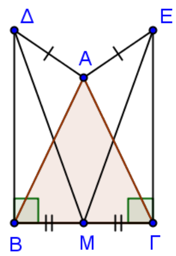
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:
1) $ΟΑ = ΟΓ = ρ$ και
2) τη γωνία Ο κοινή,
δηλαδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μία οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα. Οπότε και $ΟΔ = ΟΕ$ άρα το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:
1) $ΟΔ = ΟΕ$ και
2) τη πλευρά ΟΖ κοινή,
δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα, άρα έχουν και $ΔΟΖ = ΖΟΕ$, δηλαδή η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΓ. Επειδή οι γωνίες ΑΟΖ και ΖΟΓ είναι επίκεντρες και είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα ΑΘ και ΘΓ είναι ίσα, οπότε το Θ είναι μέσο του τόξου ΑΓ.

37012. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$.
Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$.
Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.
β) $ΑΔ = ΑΕ$.



Λύση

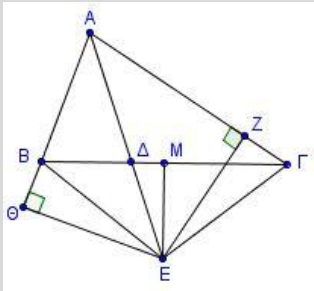


α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΕ$ και 2) $ΒΜ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ
Τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΕ$
2) $ΑΒ = ΑΓ$ και
3) $ΑΒΔ = ΔΒΜ - Β = 90^\circ - Γ = ΑΓΕ$ (οι γωνίες Β και Γ είναι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και είναι ίσες)
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΑΕ$

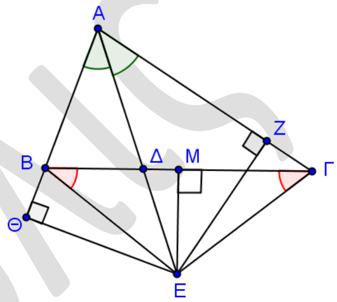
Θέμα 4ο

1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.
γ) $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}+\mathrm{A\hat{B}E}=180^\circ$.

Λύση



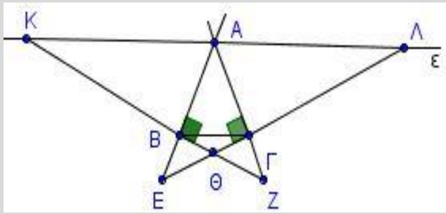
α) Στο τρίγωνο ΕΒΓ η ΕΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
2ος τρόπος: Ε σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ, οπότε ισαπέχει από τα άκρα του.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ και ΕΖΓ έχουν:
1) $\mathrm{EB}=\mathrm{E\Gamma}$
2) $\mathrm{E\Theta}=\mathrm{EZ}$ γιατί το Ε ανήκει στη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας Α, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα είναι και $\mathrm{A\Gamma E}=\mathrm{\Theta BE}$ (1)

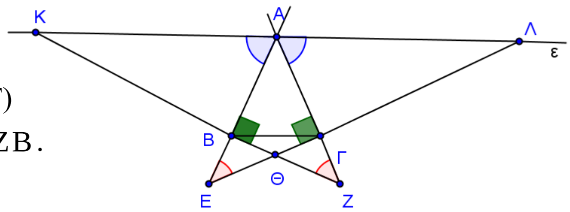
Είναι $\mathrm{\Theta BE}+\mathrm{ABE}=180^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathrm{A\Gamma E}+\mathrm{ABE}=180^\circ$

1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\mathrm{AZ}=\mathrm{AE}$ **ii.** $\mathrm{AK}=\mathrm{A\Lambda}$
β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση



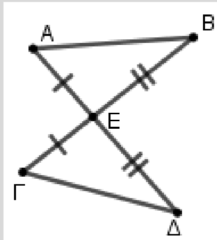
α)i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΕ έχουν:
1) τη γωνία Α κοινή
2) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}$, $\mathrm{AE\Gamma}=\mathrm{AZB}$.

ii. Τα τρίγωνα ΕΑΛ και ΚΑΖ έχουν:
1) $\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}$
2) $\mathrm{AE\Gamma}=\mathrm{AZB}$ και
3) $\mathrm{EA\Lambda}=\mathrm{KAZ}=\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{A}_{\varepsilon\xi}$ (ή με σύγκριση των τριγώνων ΚΑΒ και ΛΑΓ)
Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $\mathrm{AK}=\mathrm{A\Lambda}$.

β) Είναι $\mathrm{AB}Z = \mathrm{A}\Gamma\mathrm{E} = 90^\circ$ και $\mathrm{AB}\Gamma = \mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}$ (στη βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ), άρα και

$\mathrm{AB}Z - \mathrm{AB}\Gamma = \mathrm{A}\Gamma\mathrm{E} - \mathrm{A}\Gamma\mathrm{B} \Leftrightarrow \Gamma\mathrm{B}\Theta = \mathrm{B}\Gamma\Theta$. Τότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και $\mathrm{B}\Theta = \Theta\Gamma$.
Όμως τα ΒΘ,ΘΓ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας Α, οπότε το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α. Δηλαδή η ΑΘ είναι διχοτόμος της A.

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.
γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.



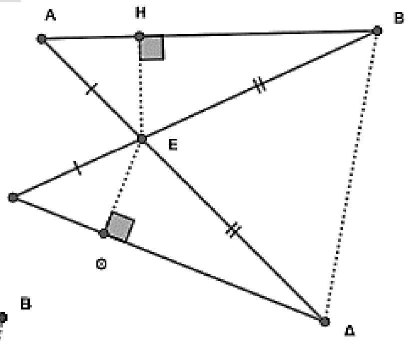
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:
- ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)
- ΒΕ=ΔΕ (υπόθεση)
- $\mathrm{AEB} = \Gamma\mathrm{E}\Delta$ (ως κατακορυφήν)

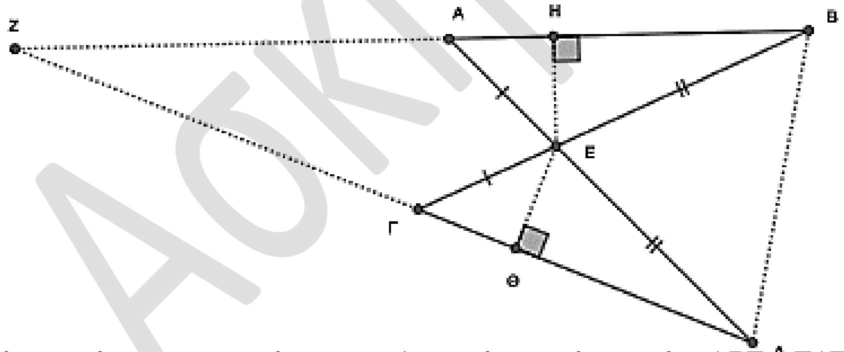
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ και ΕΘΓ έχουν:
- ΑΕ = ΓΕ
- $\mathrm{A} = \Gamma$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΒ και ΕΔ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και ΕΗ=ΕΘ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες Α και Γ αντίστοιχα.



γ)



Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\mathrm{ABE} = \Gamma\Delta\mathrm{E}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ και ΕΓ αντίστοιχα. Από υπόθεση έχουμε ΕΒ=ΕΔ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\mathrm{EB}\Delta = \mathrm{E}\Delta\mathrm{B}$. Το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $Z\mathrm{B}\Delta$ και $Z\Delta\mathrm{B}$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών:

$\mathrm{ABE} + \mathrm{EB}\Delta = \Gamma\Delta\mathrm{E} + \mathrm{E}\Delta\mathrm{B} \Leftrightarrow Z\mathrm{B}\Delta = Z\Delta\mathrm{B}$

37094. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

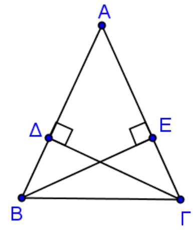
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΓ έχουν:

1) τη πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{A\Gamma B}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσας τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.
Επομένως είναι και $\mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma\Delta}$.

β) Π΄: Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη.

Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΓ κοινή και 2) $\mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma\Delta}$

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{A\Gamma B}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

Ισοσκελές τρίγωνο – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος (10 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

34424.Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.Να αποδείξετε ότι:

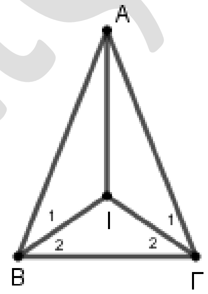
α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες $Α\hat{Ι}Β$ και $Α\hat{Ι}Γ$ είναι ίσες.

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

Λύση

α) Επειδή οι ΒΙ, ΓΙ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα, ισχύι ότι $Β_2 = \frac{Β}{2}$ και $Γ_2 = \frac{Γ}{2}$. Όμως $\hat{Β} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $Β_2 = Γ_2$. Το τρίγωνο ΒΙΓ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση)
- ΒΙ = ΙΓ γιατί το τρίγωνο ΙΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ
- $Β_1 = Γ_1$ γιατί είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΒΙΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και $Α\hat{Ι}Β = Α\hat{Ι}Γ$.

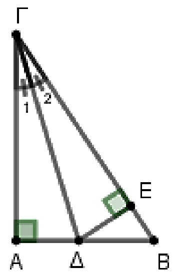
γ) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΙΒ = ΙΓ, τα σημεία Α και Ι ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΒΓ, οπότε η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

34503. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε και η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ έχουν:
- την πλευρά ΓΔ κοινή
- $Γ_1 = Γ_2$ λόγω διχοτόμησης της γωνίας Γ.

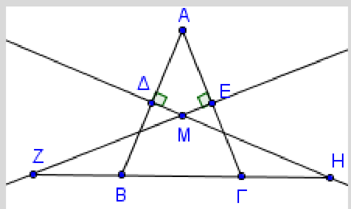
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΕ είναι ίσα, έχουν ΓΑ = ΓΕ και ΔΑ = ΔΕ. Δηλαδή τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΔΕ, επομένως η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

34507. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.
Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Η και Ζ.

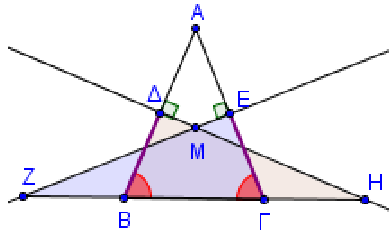
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.



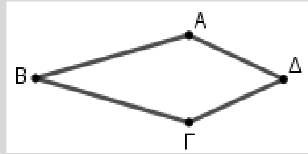
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ έχουν:
1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΓΖ είναι ίσα, έχουν και $\hat{Z} = \hat{H}$.
Το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.

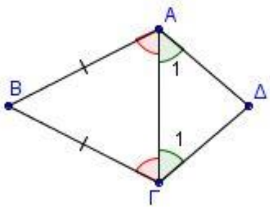
34514. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.



Λύση

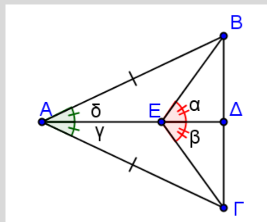
α) Επειδή $BA = B\Gamma$, το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

β) Επειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$, είναι και $\hat{A} - B\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} - B\hat{\Gamma}A \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, άρα το τρίγωνο ΔΑΓ
είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Delta A = \Delta\Gamma$.



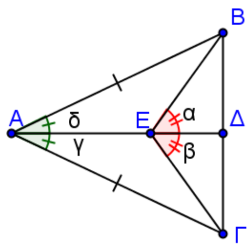
γ) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, τα σημεία Β,Δ ισαπέχουν από τα Α,Γ, άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

34516. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



Λύση

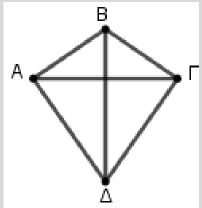
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) την πλευρά ΑΕ κοινή
2) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ (υπόθεση) και
3) ΑΒ=ΑΓ (υπόθεση)
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $EB = E\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή $EB = E\Gamma$, το Ε ισαπέχει από τα Β,Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α,Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

36102. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.
Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.



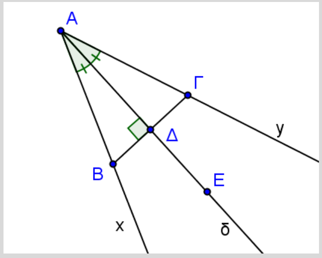
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουν:
1) $BA = B\Gamma$
2) $\Delta A = \Delta\Gamma$ και
3) τη πλευρά ΒΔ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}\Gamma$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, τα σημεία Α και Γ ισαπέχουν από τα Β,Δ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Οπότε η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ.

36341. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ.
Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο,
η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = A\Gamma$.
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

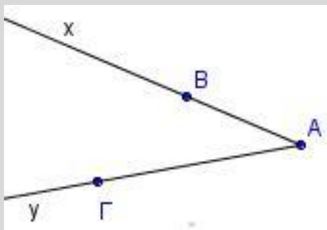


Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα
το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, επομένως $AB = A\Gamma$.

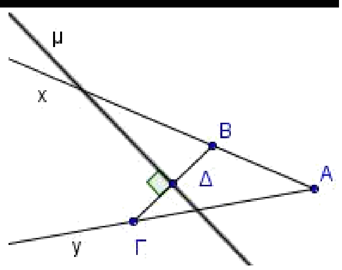
β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΔ θα είναι και διάμεσος.
Επειδή η ΑΔ είναι κάθετη στο μέσο Δ της ΒΓ, είναι μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο σημείο Ε της Αδ.

36226. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αχ και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού,
αν είναι γνωστό ότι:
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

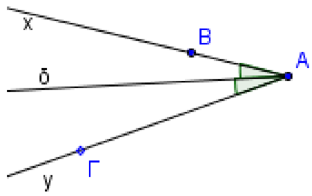


Λύση

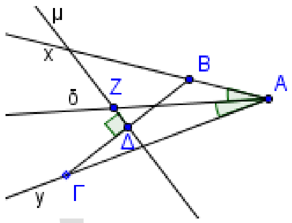
α) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Κατά συνέπεια ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Για να ισαπέχει ο θησαυρός από τα δύο ποτάμια, θα ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αy της γωνίας xAy,άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αυτής.

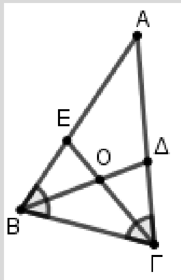


γ) Αν ο θησαυρός ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια, τότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας xAy, άρα ο θησαυρός
βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ, μ.



Θέμα 4ο

13854.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.
β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.
γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



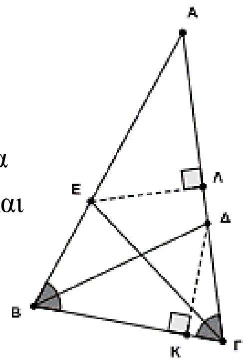
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
- τη ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{ΑΓΒ}$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\widehat{ΔΒΓ}=\widehat{ΕΓΒ}$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΑΒΓ}$.

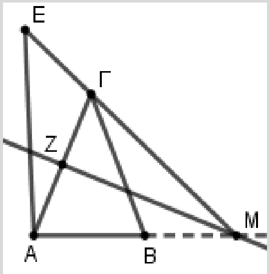
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:
- ΒΔ = ΓΕ από το προηγούμενο ερώτημα
- $\widehat{ΔΒΚ}=\widehat{ΕΓΛ}$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{ΚΒΔ}$ και $\widehat{ΛΓΕ}$.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ.
Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{ΑΓΒ}$ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείο Ε από τη άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

37823.Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ=ΒΓ).
Η μεσοκάθετη ε της ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το μέρος του Β) στο σημείο Μ και την ΑΓ στο Ζ. Στην προέκταση της ΜΓ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ=ΒΜ.
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.
β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ είναι ίσα.
γ) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΓ, ισαπέχει από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή ΜΑ = ΜΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ έχουν:
1) ΓΕ = ΒΜ (υπόθεση)
2) ΑΓ = ΒΓ
3) $E\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{B}M$ γιατί $E\hat{\Gamma}A = 180^\circ - A\hat{\Gamma}M \overset{\substack{\text{ΑΜΓ ισοσκελές}\\ \text{με βάση την ΑΓ}}}{=} 180^\circ - \Gamma\hat{A}M \overset{\substack{\text{ΑΒΓ ισοσκελές}\\ \text{με βάση την ΑΒ}}}{=} 180^\circ - A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}M$,
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ είναι ίσα, έχουν και ΜΓ= ΑΕ. Όμως ΜΓ = ΜΑ από το α σκέλος, άρα ΑΕ = ΜΑ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές.

Ανισοτικές σχέσεις

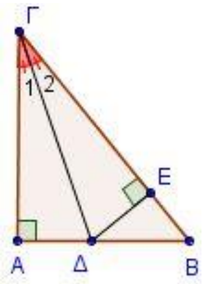
2ο Θέμα

34396. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ=ΔΕ$.

β) $ΑΔ<ΔΒ$.

Λύση



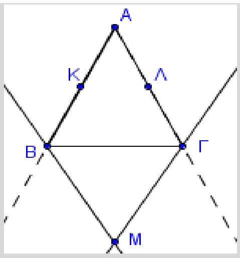
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ έχουν:
1) την πλευρά ΓΔ κοινή και
2) $Γ_1=Γ_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Γ.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ=ΔΕ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΔΒ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $ΔΒ>ΔΕ$, όμως $ΑΔ=ΔΕ$, άρα $ΔΒ>ΑΔ$.

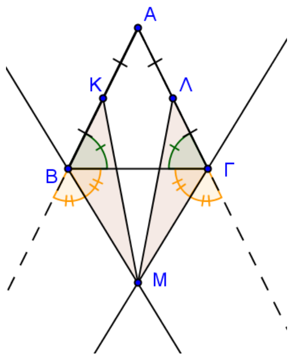
34415. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=ΑΓ$.
Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $ΜΒ=ΜΓ$.

β) $ΜΚ=ΜΛ$.



Λύση



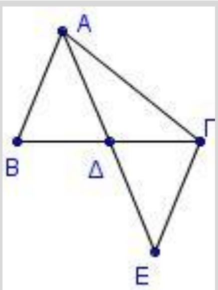
α) Επειδή οι ΒΜ και ΓΜ είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, έχουμε: $ΜΒΓ=\frac{Β_{εξ}}{2}=\frac{180^{\circ}-Β}{2}=\frac{180^{\circ}-Γ}{2}=\frac{Γ_{εξ}}{2}=ΜΓΒ$.
Το τρίγωνο ΜΓΒ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $ΜΒ=ΜΓ$.

β) Τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ έχουν:
1) $ΚΒ=ΛΓ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
2) $ΜΒ=ΜΓ$ και
3) $ΚΒΜ=Β+ΜΒΓ=Γ+ΜΓΒ=ΛΓΜ$
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΜΚ=ΜΛ$.

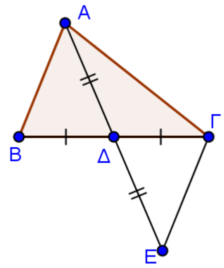
34502. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $ΔΕ=ΑΔ$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒ=ΓΕ$.

β) $ΑΔ<\frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$.



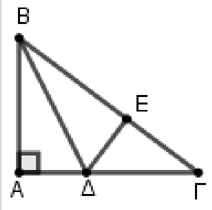
Λύση



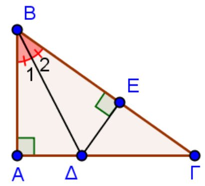
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ έχουν:
1) $ΑΔ = ΔΕ$
2) $ΒΔ = ΔΓ$ γιατί το Δ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $ΑΔΒ = ΕΔΓ$ ως κατακορυφήν
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΒ = ΓΕ$ (1).

β) $ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ \Leftrightarrow ΑΕ = 2ΑΔ$
Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ ισχύει ότι:
$$ΑΕ < ΑΕ + ΑΓ \Leftrightarrow ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ \Leftrightarrow ΑΔ < \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}.$$

36168. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β.
Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΔ = ΔΕ$.
β) $ΑΔ < ΔΓ$.
γ) $ΑΓ > ΑΒ$.



Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΔΕ έχουν:

1) την πλευρά ΒΔ κοινή και
2) $Β_1 = Β_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Β.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΔΕ$.

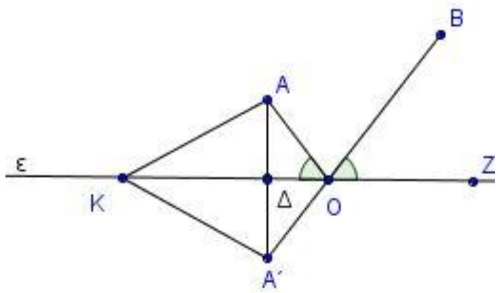
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $ΔΓ > ΔΕ$, όμως $ΑΔ = ΔΕ$, άρα $ΔΓ > ΑΔ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή $Γ < Β$ είναι και $ΑΒ < ΑΓ$.

Θέμα 4ο

1749. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω $Α'$ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.
α) Αν η $ΒΑ'$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:
i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $ΑΟΑ'$.
ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.
β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:
i. $ΚΑ = ΚΑ'$
ii. $ΚΑ + ΚΒ > ΑΟ + ΟΒ$

Λύση



α) i. Επειδή στο τρίγωνο $ΟΑΑ'$ η ΟΔ είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΟΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΑΟΑ'$.

ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ορθογώνιο, η γωνία ΑΟΔ είναι οξεία. Είναι $ΔΟΑ' = ΒΟΖ$ ως κατακορυφήν και

$\Delta O A' < 90^{\circ}$, άρα και $BOZ < 90^{\circ}$.

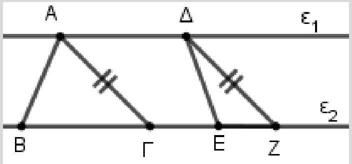
Άρα οι ζητούμενες οξείες γωνίες είναι οι $AO\Delta$, BOZ και είναι ίσες.

β) i. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του AA' ισχύει ότι: $KA = KA'$.

ii. Στο τρίγωνο KBA' από τη τριγωνική ανισότητα, ισχύει ότι:

$KA' + KB > BA' \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^{\circ}$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.



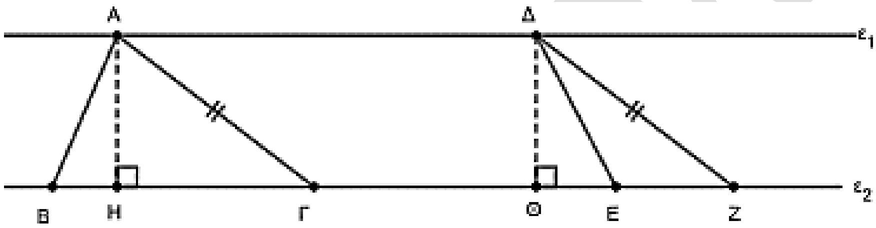
α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντας τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ.

Λύση

α) i.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ έχουν:

- ΑΘ = ΔΘ, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- ΑΓ = ΔΗ, από την υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή ΗΓ = ΘΖ.

β) Το σημείο Η είναι εσωτερικό του τμήματος ΒΓ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε ΗΓ < ΒΓ.
Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος ΕΖ γιατί η γωνία Ε είναι αμβλεία, οπότε ΕΖ < ΘΖ.
Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΘΓ = ΘΗ. Άρα ΕΖ < ΘΖ, ΗΓ = ΘΓ και ΗΓ < ΒΓ, επομένως ΕΗ < ΒΓ.

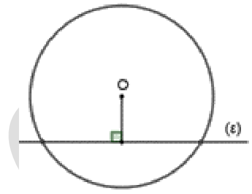
Σχετική θέση ευθείας – κύκλου

Θέμα 2ο

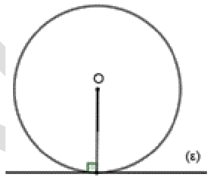
13759.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:
α) d = 3. **β)** d = 6. **γ)** d = 9.

Λύση

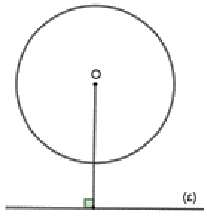
α) Επειδή η απόσταση d = 3 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



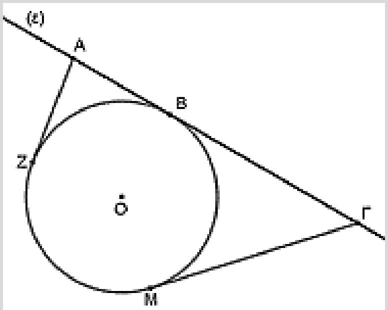
β) Επειδή η απόσταση d = 6 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση d = 9 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη με την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



13817.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.
Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε).
Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.
α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ.

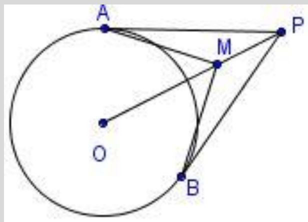


Λύση

α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΖ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτό, άρα είναι ίσα, δηλαδή ΑΒ = ΑΖ.
Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ,ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα ΓΒ =ΓΜ .

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΑΖ + ΜΓ.

36095. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.
β) $M\hat{A}O = M\hat{B}O$.

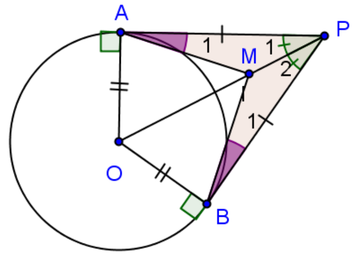


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ έχουν:

1) τη πλευρά ΡΜ κοινή
2) $\text{PA} = \text{PB}$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο
3) $\text{P}_1 = \text{P}_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων

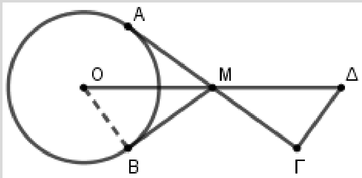
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα, έχουν και $\text{A}_1 = \text{B}_1$.

Όμως $\text{OAM} = \text{OBM} = 90^\circ$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $\text{MAO} = 90^\circ - \text{A}_1 = 90^\circ - \text{B}_1 = \text{MBO}$.

36098. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.



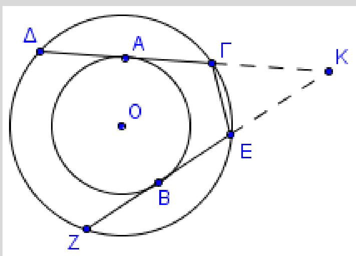
Λύση

α) Τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ που άγονται από το Μ προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα. Ακόμη ΜΑ = ΜΓ, οπότε είναι και ΜΒ = ΜΓ.

β) Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΒ των εφαπτομένων, δηλαδή $\text{AMO} = \text{OMB}$.
Όμως $\text{AMO} = \Gamma\text{M}\Delta$ ως κατακορυφήν, άρα $\text{AMO} = \Gamma\text{M}\Delta$.
Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ έχουν:
- ΟΜ=ΜΔ (υπόθεση)
- ΜΒ = ΜΓ
- $\text{AMO} = \Gamma\text{M}\Delta$

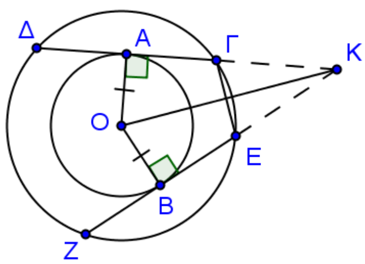
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα

36338. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = \text{ZE}$.
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.



Λύση

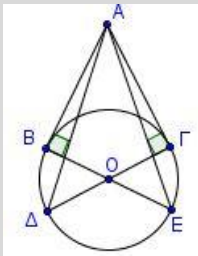
α) Έστω ΟΑ και ΟΒ οι ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες.
Τότε $\text{OA} \perp \Gamma\Delta$ και $\text{OB} \perp \text{EZ}$.
Τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ στον κύκλο (Ο,R) και είναι ίσα $(\text{OA} = \text{OB} = \rho)$, άρα και οι χορδές ΓΔ και ΕΖ είναι ίσες.



β) Επειδή τα ΚΑ, ΚΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Κ προς τον κύκλο (Ο, ρ), είναι μεταξύ τους ίσα.
Επειδή τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ, τα σημεία Α και Β είναι μέσα

των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $A\Gamma = BE$.
Είναι $KA = KB$ και $A\Gamma = BE$, άρα και $KA - A\Gamma = KB - BE \Leftrightarrow K\Gamma = KE$, οπότε το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.

36354. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ.
Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.



Λύση

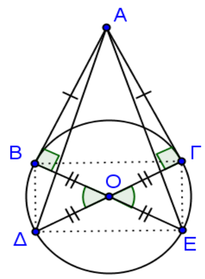
α) Επειδή οι εφαπτομένες ενός κύκλου είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής, οι γωνίες ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ορθές.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
1) $AB = A\Gamma$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
2) $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΓΕ έχουν:
1) $OB = OE = \rho$,
2) $O\Delta = O\Gamma = \rho$ και
3) $BO\Delta = \Gamma OE$ ως κατακορυφήν.

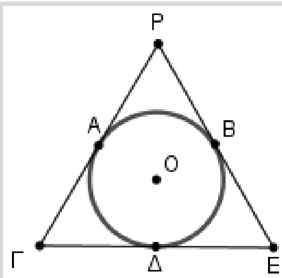
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $AB = A\Gamma$
2) $A\Delta = AE$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα και
3) $B\Delta = \Gamma E$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



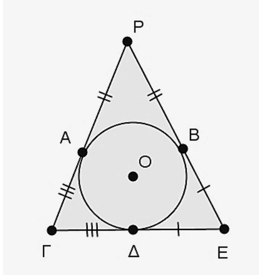
Θέμα 4ο

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$
ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$
β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.
ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.



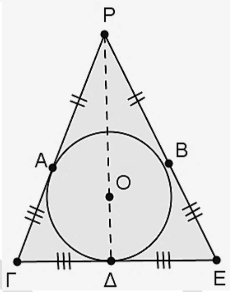
Λύση

α) i. Τα ΓΑ,ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε $\Gamma A = \Gamma\Delta$.
Είναι $P\Gamma = PA + A\Gamma \Leftrightarrow P\Gamma = PA + \Gamma\Delta$.



ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε $ΕΒ = ΕΔ$. Όμοια ΡΑ,ΡΒ εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ και ισχύει $ΡΑ = ΡΒ$.
Όμως $ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ \Leftrightarrow ΡΑ = ΡΓ - ΓΔ$ και
$ΡΒ = ΡΕ - ΒΕ = ΡΕ - ΔΕ$, άρα $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$.

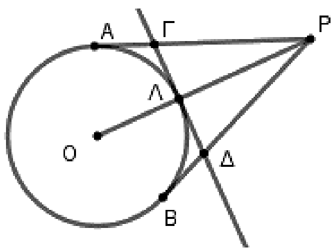
β) i. Αν $ΑΓ = ΒΕ$, τότε $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ$.
Είναι $ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ$, $ΡΕ = ΡΒ + ΔΕ$, οπότε $ΡΓ = ΡΕ$, άρα το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.



ii. Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ρ$ και $ΟΑ \perp ΡΓ$, $ΟΒ \perp ΡΒ$, το Ο ισαπέχει από τις πλευρές ΡΓ, ΡΕ της γωνίας Ρ, οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας.
Επειδή το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές και το ΡΔ είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας Ρ. Άρα τα Ο,Δ ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας Ρ, οπότε τα σημεία Ρ,Ο,Δ είναι συνευθειακά.

1752.Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.
β) ΓΑ= ΔΒ.
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ+ ΡΒ.

Λύση



α) Επειδή η ΓΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Λ, ισχύει ότι $ΓΔ \perp ΡΟ$. Επειδή η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία ΓΡΔ των εφαπτομένων, στο τρίγωνο ΡΓΔ, το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι ίσα και οι πλευρές ΡΓ και ΡΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΔ είναι επίσης ίσες, ισχύει ότι:
$ΡΑ - ΡΓ = ΡΒ - ΡΔ \Leftrightarrow ΓΑ = ΔΒ$

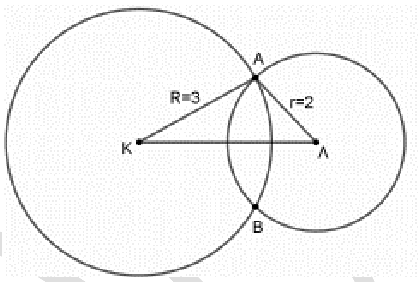
γ) Τα ΓΑ, ΓΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Γ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.
Τα ΔΒ, ΔΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.
Αν Π η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ, είναι Π=ΡΓ+ΓΔ+ΡΔ=ΡΓ+ΓΛ+ΛΔ+ΡΔ=ΡΓ+ΓΑ+ΔΒ+ΡΔ=ΡΑ+ΡΒ

Σχετική θέση δύο κύκλων

Θέμα 2ο

12417. Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και ΚΛ=4. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.
β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

Λύση



α) Είναι $R + r = 5$ και $R - r = 1$.
Επειδή $R - r < K\Lambda < R + r$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.
β) Στο τρίγωνο ΚΑΛ είναι ΚΛ > ΑΚ και επειδή απέναντι από άνισες πλευρές σε ένα τρίγωνο βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες, ισχύει ότι $KA\Lambda > A\Lambda K$.

13757.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5);
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Έστω R = 5 και ρ = 2.
α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : ΚΛ = R + ρ = 5 + 2 = 7.

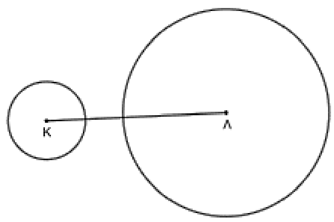
β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : ΚΛ = R - ρ = 5 - 2 = 3.

γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει ΚΛ < R –ρ, δηλαδή ΚΛ < 5- 2 ή ΚΛ < 3.

δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει R- ρ < ΚΛ < R + ρ, δηλαδή 5 – 2 < ΚΛ < 5 + 2 ή 3 < ΚΛ < 7.

13758.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:
α) ΚΛ = 13. **β)** ΚΛ = 2. **γ)** ΚΛ = 5.
δ) ΚΛ = 11. **ε)** ΚΛ = 9.

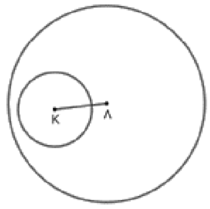
Λύση



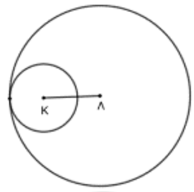
Έστω R = 8 και ρ = 3. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή
R - ρ = 8 - 3 = 5 και R + ρ = 8 + 3 = 11.

α) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 13 έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, ο κύκλος (Λ,8) βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (Κ,3)

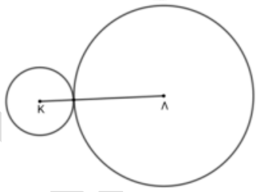
β) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 2 έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, ο κύκλος (Κ,3) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,8).



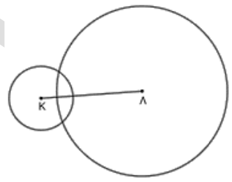
γ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 5 έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



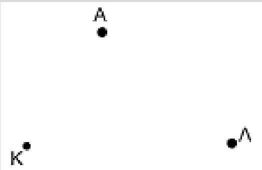
δ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 11 έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 9 έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς R - ρ = 5 και του αθροίσματος των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι τέμνονται.

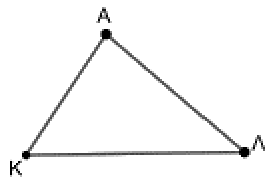


13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.
α) Να αποδείξετε ότι 1< ΚΛ < 9.
β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

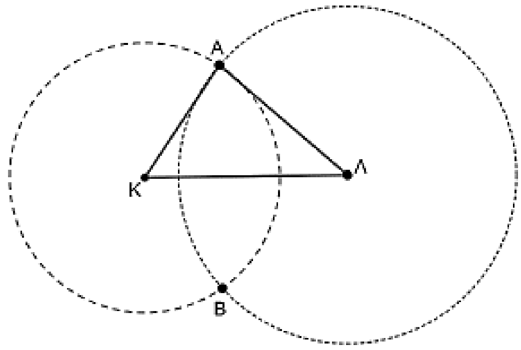


Λύση

α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ.
Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι
$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \Leftrightarrow 5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < ΚΛ < 9$.

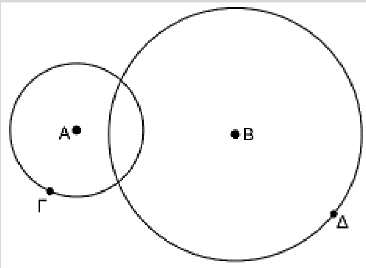


β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το Κ και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Β και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:
$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \Leftrightarrow R - ρ < ΚΛ < R + ρ$,
όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ.
Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R.
Να αποδείξετε ότι $ΒΔ - ΑΓ < ΑΒ < ΑΓ + ΒΔ$.

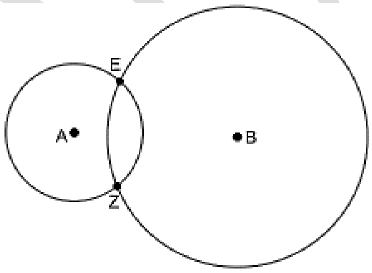
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



Λύση

α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - ρ < δ < R + ρ$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους.
Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επιπλέον ισχύουν ΑΓ = ρ και ΒΔ = R.
Επομένως $ΒΔ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΔ + ΑΓ$.

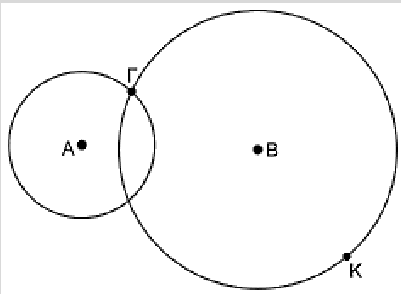
β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το Α και 5 από το Β είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Α και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Β και ακτίνα 5.
Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με ρ = 3 και R = 5.
Τότε η ΑΒ = 6 είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - ρ < ΑΒ < R + ρ$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε 5 − 3 < 6 < 5 + 3, που είναι αληθές.
Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ.



Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το Α και 5 από το Β, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.

Θέμα 4ο

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R και ΑΒ = 6.
i. Να αποδείξετε ότι: $ΒΚ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΚ + ΑΓ$.
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2.
Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;
Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



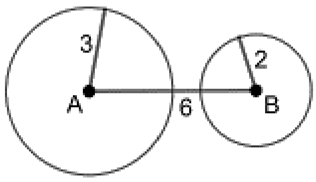
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

Λύση

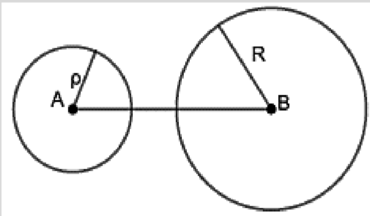
α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - ρ < δ < R + ρ$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους.
Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επίσης $ρ = ΑΓ$ και $R = ΒΚ$. Επομένως $ΒΚ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΚ + ΑΓ$.

ii. Το σημείο Κ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (Β, R) και όχι του κύκλου (Α, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το Α και R από το Β.

β) Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.
Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το Α και 2 από το Β θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει. Όμως η απόσταση των σημείων Α και Β που είναι η διάκεντρος των κύκλων (Α,3) και (Β,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.



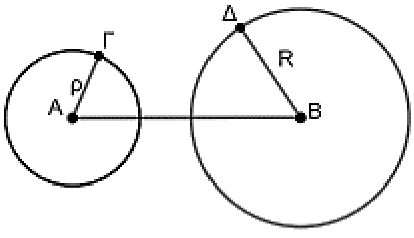
13846.Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.
α) Να αποδείξετε ότι R + ρ < 9.
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.
γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;
Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».
Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

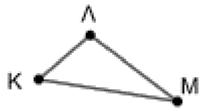


Λύση

α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο ΑΒ. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

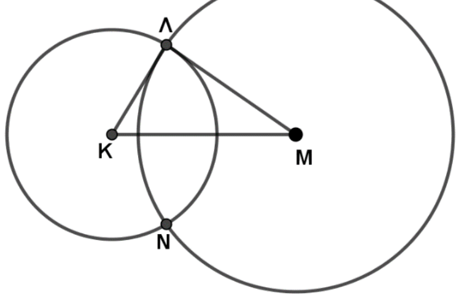
β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ=ρ και ΒΔ=R έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.





Ισχύει ότι ΛΜ > ΚΛ , γιατί R > ρ. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $ΛΜ - ΚΛ < ΚΜ < ΛΜ + ΚΛ$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.
Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$.
Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.



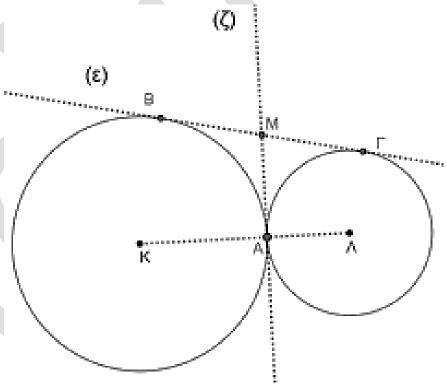
Όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα $R - \rho < KM < R + \rho$ όπου ΚΜ η διάμετρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο σημεία τομής.
Άρα δύο σημεία είναι τα ζητούμενα σημεία τα Λ και Ν.

Θέμα 3ο

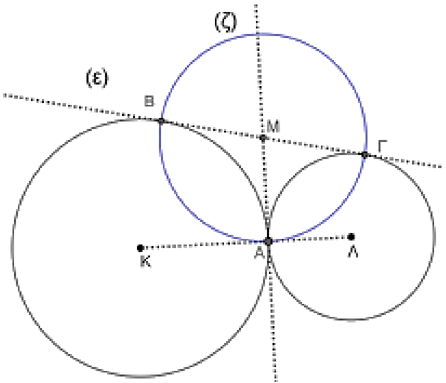
13702.Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$).

Λύση

Έστω οι κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε)



α) Το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ και τα Β, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία Α, Β και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου. Το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα. Είναι ΜΒ = ΜΑ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Κ, $ρ_1$) από το σημείο Μ. Επίσης είναι ΜΑ = ΜΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, $ρ_2$) από το σημείο Μ. Οπότε θα είναι ΜΒ = ΜΑ = ΜΓ (= κ). Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα ίση με κ.



β) Επειδή οι κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) εφάπτονται εξωτερικά στο Α, η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ και κάθετη στην ακτίνα ΛΑ αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο Α θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Η ακτίνα ΜΑ (=κ) του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το Μ έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους Α, οπότε η ακτίνα ΜΑ θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Α.

Παραλληλία

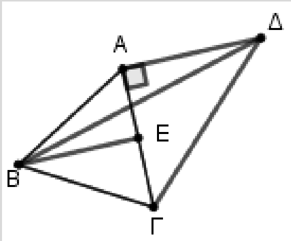
Θέμα 2ο

12710.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ.

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες.

γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, δηλαδή η ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ. Το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α , οπότε η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΓ.
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΑΔ είναι κάθετα στην ΑΓ, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

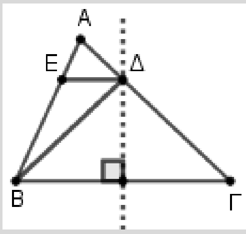
β) Οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ και ΑΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΔ έχουμε ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.

13534.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

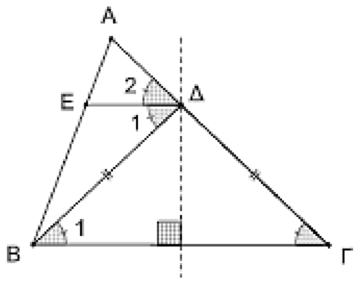
α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.



Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΔΒ = ΔΓ.
Συνεπώς το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

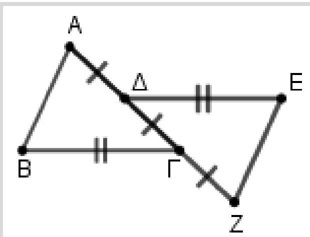


β) Είναι $\hat{E}_1 = \hat{B}_1 \ (1)$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ και $\hat{E}_2 = \hat{\Gamma} \ (2)$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ.
Όμως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, επομένως η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

13748.Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα.
Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα.

β) ΑΒ // ΕΖ.

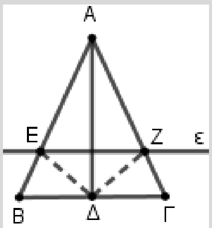


Λύση

α) Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = 2ΔΓ.
Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα 2ΔΓ =ΑΓ, οπότε θα είναι ΔΖ = ΑΓ (1).
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν:
• ΒΓ = ΔΕ, από την υπόθεση
• ΑΓ = ΔΖ, από τη σχέση (1)
• $\text{ΑΓΒ} = \text{ΖΔΕ}$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ.
Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

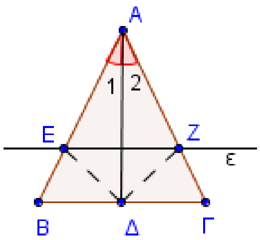
β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $\text{ΒΑΓ} = \text{ΕΖΔ}$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα ΑΒ // ΕΖ.

34399. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.



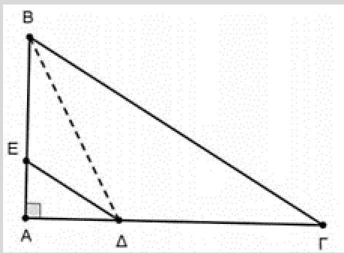
Λύση

α) Είναι $\text{ΑΕΖ} = \text{Β}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ και $\text{ΑΖΕ} = \text{Γ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Όμως $\text{Β} = \text{Γ}$ αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα $\text{ΑΕΖ} = \text{ΑΖΕ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.



β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:
1) την πλευρά ΑΔ κοινή
2) $\text{Α}_1 = \text{Α}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και
3) $\text{ΑΕ} = \text{ΑΖ}$ επειδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

34776. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i) $\text{Ε}\hat{\text{Δ}}\text{Β} = \text{Δ}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$ και $\text{Ε}\hat{\text{Δ}}\text{Α} = \hat{\text{Γ}}$.
ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β} = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ.



Λύση

α) i) Οι γωνίες $\text{ΕΔΒ}, \text{ΔΒΓ}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ. ΒΓ που τέμνονται από την ΔΒ, οπότε είναι ίσες. Οι γωνίες $\text{ΕΔΑ}, \hat{\text{Γ}}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε είναι ίσες.

ii) Επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ είναι $\mathrm{E\Delta A}=\mathrm{E\Delta B}$, τότε λόγω του προηγούμενου σκέλους είναι και $\Delta\mathrm{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\hat{\Gamma}=\mathrm{E\Delta A}=\dfrac{\mathrm{A\Delta B}}{2}=30^\circ$

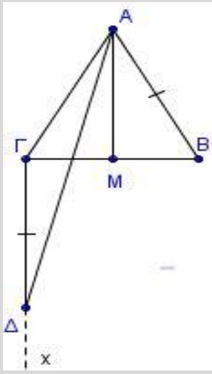
34777. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x\perp \mathrm{B}\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta=\mathrm{AB}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ είναι ίση με τη $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

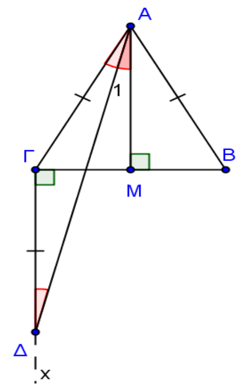
i) ΓΔ//ΑΜ

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



Λύση

α) Είναι $\Gamma\Delta=\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta=\mathrm{A}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα έχει και $\Delta\mathrm{A}\Gamma=\Gamma\Delta\mathrm{A}$.



β) i) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου.
Είναι $\Gamma\Delta\perp\mathrm{B}\Gamma$ και $\mathrm{AM}\perp\mathrm{B}\Gamma$, άρα $\Gamma\Delta\parallel\mathrm{AM}$.

ii) Είναι $\Gamma\Delta\mathrm{A}=\mathrm{A}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΔ, ΑΜ που τέμνονται από την ΓΒ και $\Delta\mathrm{A}\Gamma=\Gamma\Delta\mathrm{A}$, άρα είναι και $\Delta\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{A}_1$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

34779. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AE}=\mathrm{A}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

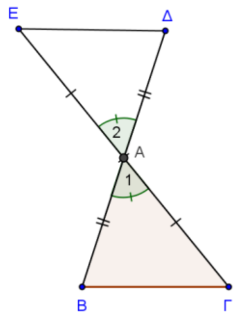
β) $\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{B}\Gamma$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

1) $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AB}$
2) $\mathrm{AE}=\mathrm{A}\Gamma$
3) $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2$ ως κατακορυφήν

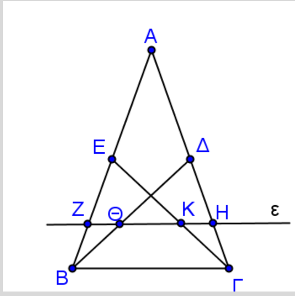
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, έχουμε και $\mathrm{E}=\Gamma$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ, άρα οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) $ΒΖ = ΓΗ$.
β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.
γ) $ΖΚ = ΗΘ$.



Λύση

α) Είναι $ΑΖΗ = ΑΒΓ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Όμοια $ΑΗΖ = ΑΓΒ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Όμως $ΑΒΓ = ΑΓΒ$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα και $ΑΗΖ = ΑΖΗ$, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές και $ΑΖ = ΑΗ$.Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΖ = ΑΗ$, είναι και $ΑΒ - ΑΖ = ΑΓ - ΑΗ \Leftrightarrow ΒΖ = ΓΗ$.

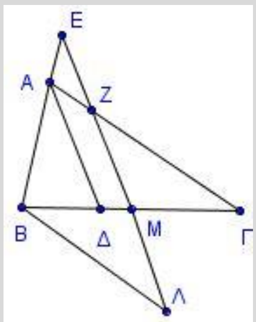
β) Αρχικά θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ για να βρούμε στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αυτά έχουν:
1) $ΑΒ = ΑΓ$
2) $ΑΕ = ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ και
3) τη γωνία Α κοινή

Λόγω του κριτηρίου ισότητας Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $ΑΒΔ = ΑΓΕ$.
Τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ έχουν:
1) $ΒΖ = ΓΗ$
2) $ΑΒΔ = ΑΓΕ$ και
3) $ΒΖΘ = ΚΗΓ$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $ΑΗΖ$ και $ΑΖΗ$.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) Είναι $ΖΚ = ΖΘ + ΘΚ = ΚΗ + ΘΚ = ΗΘ$.(ΖΘ=ΗΚ από την ισότητα των τριγώνων ΖΒΘ και ΗΚΓ)

1818. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.
β) $ΒΛ = ΓΖ$.
γ) $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$.



Λύση

α) Είναι $Ε = ΒΑΔ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΒΕ και $ΕΖΑ = ΔΑΓ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ,ΕΜ που τέμνονται από την ΑΓ. Επειδή

$B A \Delta = \Delta A \Gamma$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, είναι και $E = EZA$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι $EZA = B\Lambda E$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΓ, ΒΛ που τέμνονται από την ΕΛ. Άρα $E = B\Lambda E$ και το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ έχουν:

1) $BM = M\Gamma$

2) $ZM\Gamma = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν και

3) $\Lambda BM = Z\Gamma M$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ,ΒΛ που τέμνονται από την ΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ είναι ίσα. Άρα $B\Lambda = \Gamma Z$.

γ) Είναι $AE = AZ = A\Gamma - \Gamma Z = A\Gamma - B\Lambda$

13699. Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

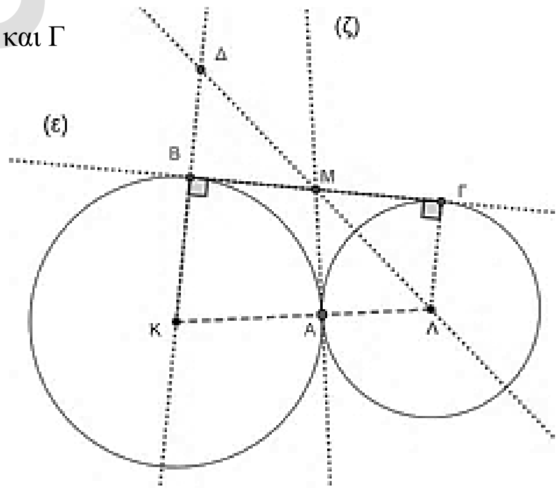
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ.

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



α) i. Επειδή ΚΒ, ΛΓ ακτίνες κύκλων στα σημεία επαφής Β και Γ με την (ε), είναι $KB \perp (\varepsilon)$ και $\Lambda\Gamma \perp (\varepsilon)$. Άρα ΚΒ//ΛΓ.

Η ΛΜ τέμνει τη ΛΓ στο Λ, επομένως θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτήν οπότε και την ΛΜ.

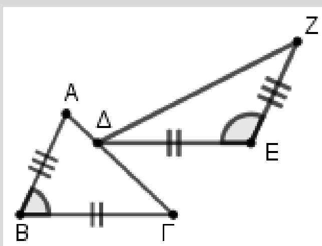
ii. Η διακεντρική ευθεία ΜΛ διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής Α, Γ, δηλαδή $A\hat{\Lambda}\Gamma = M\hat{\Lambda}\Gamma$ (1).

Επειδή ΚΔ//ΛΓ είναι $K\hat{\Delta}\Lambda = M\hat{\Lambda}\Gamma$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΚΔ, ΛΓ που τέμνονται από την ΔΛ.

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $A\hat{\Lambda}\Gamma = K\hat{\Delta}\Lambda$, οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ είναι ορθογώνιο όταν $\hat{K} = 90^\circ$. Τότε το ΒΚΛΓ είναι ορθογώνιο οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσε, δηλαδή ΚΒ = ΛΓ $\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

13752. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΗ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\Delta\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

2. Οπότε $\Delta EZ = AB\Gamma$.

3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας B και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

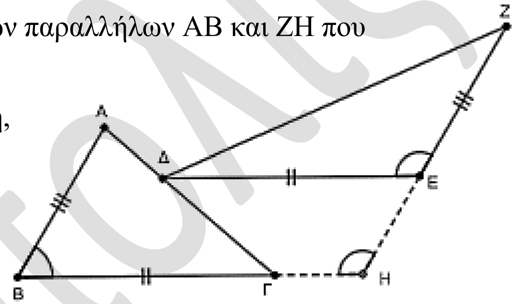
Λύση

α) 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος. Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

$Ζ\text{Ε}Δ = \text{ΕΗΓ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΗ που τέμνονται από την ΖΗ.

$\text{ΕΗΓ} + \text{ΑΒΓ} = 180^\circ$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΖΗ που τέμνονται από την ΒΗ. Άρα $\text{ΖΕΔ} + \text{ΑΒΓ} = 180^\circ$, δηλαδή είναι παραπληρωματικές γωνίες και αφού $B < 90^\circ$ από την υπόθεση, τότε $\text{ΖΕΔ} > 90^\circ$.
Άρα δεν είναι ίσες.
Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.



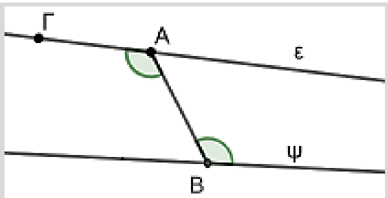
γ) Οι γωνίες ΖΕΔ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

• Αν $\text{ΑΒΓ} < 90^\circ$, τότε $\text{ΖΕΔ} > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $\text{ΑΒΓ} < \text{ΖΕΔ}$ τότε ΑΓ < ΔΖ.

• Αν $\text{ΑΒΓ} > 90^\circ$, τότε $\text{ΖΕΔ} < 90^\circ$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού ΑΒΓ > ΖΕΔ τότε ΑΓ > ΔΖ.

• Αν $\text{ΑΒΓ} = 90^\circ$, τότε $\text{ΖΕΔ} = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσες τους. Δηλαδή, αφού $\text{ΑΒΓ} = \text{ΖΕΔ}$ τότε ΑΓ = ΔΖ. Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ είναι όταν οι γωνίες ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.

13822.Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).



α) Αν η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ είναι μεγαλύτερη από την $\text{Α}\hat{\text{Β}}ψ$:

i. Να αποδείξετε ότι $\text{Β}\hat{\text{Α}}ε + \text{Α}\hat{\text{Β}}ψ < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται.
Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

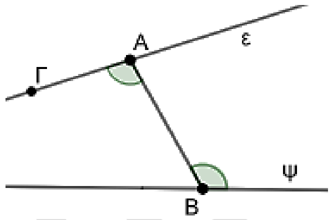
γ) Αν ισχύει $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} < \text{Α}\hat{\text{Β}}ψ$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

Λύση

α) i. Είναι $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - B\hat{A}\varepsilon$.

Είναι $B\hat{A}\Gamma > A\hat{B}\psi \Leftrightarrow 180^\circ - B\hat{A}\varepsilon > A\hat{B}\psi \Leftrightarrow B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$

ii. Οι γωνίες $B\hat{A}\varepsilon$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την ΑΒ και επειδή $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος που βρίσκεται η $A\hat{B}\psi$.

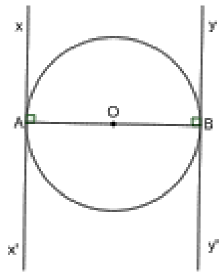


β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

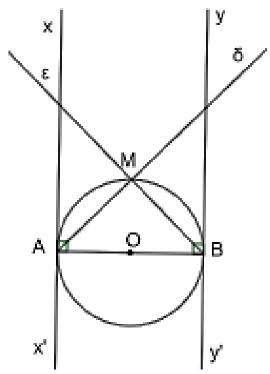
γ) Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ε και ψ με τέμνουσα την ΑΒ. Όμως δίνεται ότι $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$.
Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$, οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος της $B\hat{A}\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

13843. Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες.
β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ.
γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.
δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ.

Λύση

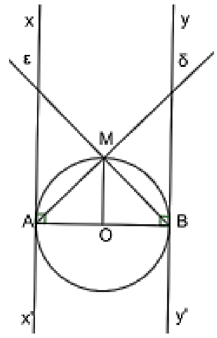


13843. α) Οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του ΑΒ, επομένως, είναι κάθετες στην ΑΒ και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



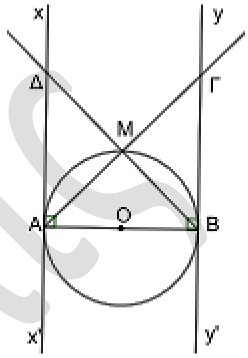
β) Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε η Αδ και η Βε θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΑΒ που βρίσκονται οι γωνίες.

Είναι $B\hat{A}\delta + A\hat{B}\varepsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ < 180^\circ$, άρα οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.



γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $BAM = BA\delta = 45^\circ$ και $ABM = AB\varepsilon = 45^\circ$.
Επομένως, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ. Άρα, το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ορθογώνιο διότι ΜΟ μεσοκάθετος της ΑΒ, οπότε $AOM = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε $OAM = 45^\circ$, άρα $OMA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.
Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R. Δηλαδή, το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου (O,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

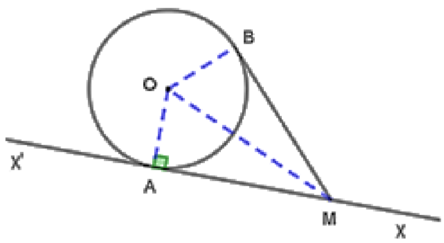


δ) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν :
- ΑΜ = ΒΜ, από το ερώτημα (γ)
- $A\hat{M}\Delta = B\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $MA\Delta = MB\Gamma = 45°$

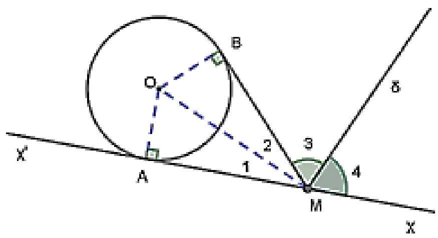
Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΑΔ και ΜΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ

34335.Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση
ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:
α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R)
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ,
γ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.

Λύση



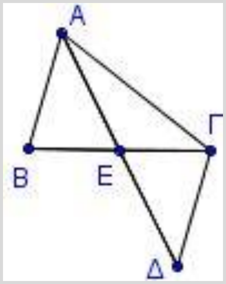
α) Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:
1) ΜΟ, κοινή πλευρά
2) ΟΒ = ΟΑ, ακτίνες του κύκλου (O,R) , ΜΒ = ΜΑ, υπόθεση
Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς (Π-Π-Π), οπότε είναι ίσα. Επομένως $O\hat{A}M = O\hat{B}M$ και επειδή $O\hat{A}M = 90^\circ$, είναι και $O\hat{B}M = 90^\circ$, άρα το ΜΒ είναι εφαπτόμενο του κύκλου.



β) Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΟΜ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{M}B$ των εφαπτομένων. Ακόμη γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. Επειδή οι γωνίες $A\hat{M}B$ και $B\hat{M}x$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, οι διχοτόμοι τους ΟΜ, Μδ είναι κάθετες.

γ) Αν η ΟΒ δεν έτεμνε την Μδ τότε θα ήταν παράλληλη σε αυτήν. Τότε οι γωνίες $O\hat{B}M = 90^\circ$ και $\hat{M}_3$ θα ήταν εντός εναλλάξ, οπότε ίσες. Δηλαδή $\hat{M}_3 = 90^\circ$, οπότε $B\hat{M}x = 180^\circ$ που είναι άτοπο. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.

37166. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι:

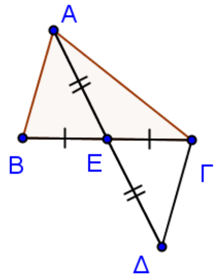
i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

Λύση

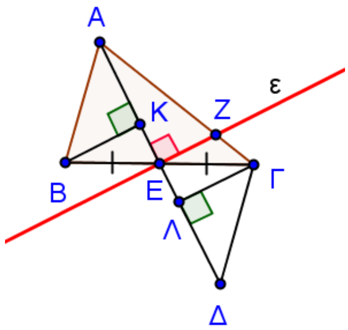


α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ έχουν:

1) $AE = E\Delta$
2) $BE = E\Gamma$ και
3) $AEB = \Gamma E\Delta$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB = \Gamma\Delta$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΕ και ΕΓΔ είναι ίσες. Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ των ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.



iii. Έστω ΒΚ, ΓΛ οι αποστάσεις των Β, Γ από την ΑΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΛΕ έχουν:

1) $BE = E\Gamma$ και
2) $AEB = \Gamma E\Delta$ ως κατακορυφήν,

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $BK = \Gamma\Lambda$.

β) Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο ισαπέχει από δύο άλλα όταν βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αυτά. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη μεσοκάθετο (ε) του ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Το Ζ είναι το ζητούμενο σημείο.

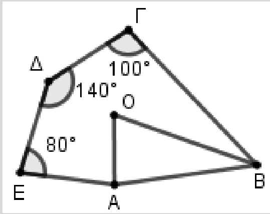
Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θέμα 2ο

12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100ο , η γωνία του Δ ισούται με 140ο και η γωνία του Ε ισούται με 80ο τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A}+\hat{B}$.

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν - 4 ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A+B+\Gamma+\Delta+E=(2\cdot 5-4)90^\circ=540^\circ \Leftrightarrow$$

$$A+B+100^\circ+140^\circ+80^\circ=540^\circ \Leftrightarrow A+B=540^\circ-320^\circ=220^\circ$$

β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB+OAB+OBA=180^\circ \Leftrightarrow AOB+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=180^\circ \Leftrightarrow AOB+\frac{A+B}{2}=180^\circ \Leftrightarrow$$

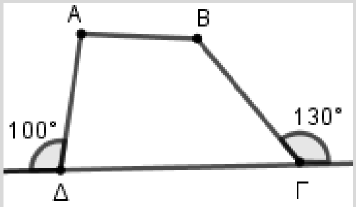
$$AOB+110^\circ=180^\circ \Leftrightarrow AOB=70^\circ$$

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130ο και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110ο .
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A}+\hat{B}$.

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Είναι $\Gamma=180^\circ-130^\circ=50^\circ$ και $\Delta=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A+B+\Gamma+\Delta=360^\circ \Leftrightarrow A+B+50^\circ+70^\circ=360^\circ \Leftrightarrow A+B=240^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB+OAB+OBA=180^\circ \Leftrightarrow AOB+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=180^\circ \Leftrightarrow AOB+\frac{A+B}{2}=180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB+120^\circ=180^\circ \Leftrightarrow AOB=60^\circ$$

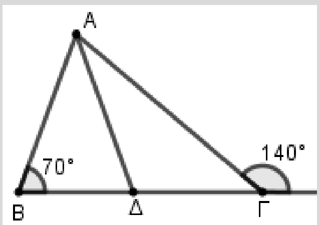
12704. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^\circ$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Delta=40^\circ$.

β) $A\hat{\Delta}\Gamma=110^\circ$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή ΑΔ= ΑΒ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A\Delta B} = \mathrm{B} = 70^\circ$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$\mathrm{BA\Delta} + \mathrm{A\Delta B} + \mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{BA\Delta} + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{BA\Delta} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

β) Είναι $\mathrm{A\Delta\Gamma} + \mathrm{A\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

γ) Είναι $\mathrm{A\Gamma B} + \Gamma_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma B} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{A} + \hat{\mathrm{B}} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A} + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

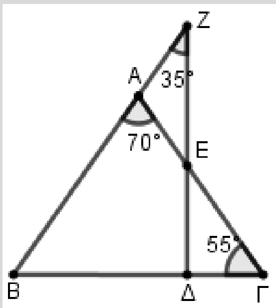
Επειδή $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 70^\circ$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

12707.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.
Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $\mathrm{B\hat{Z}\Delta} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) $\mathrm{Z\hat{\Delta}B} = 90^\circ$.

γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \mathrm{B} + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \mathrm{B} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Επειδή $\mathrm{B} = \Gamma$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΖΒΔ έχουμε:

$$\mathrm{Z} + \mathrm{Z\Delta B} + \mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \mathrm{Z\Delta B} + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{Z\Delta B} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

γ) Είναι $\mathrm{A} + \mathrm{A}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

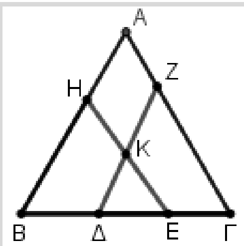
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$\mathrm{A}_{\varepsilon\xi} + \mathrm{Z} + \mathrm{ZEA} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 35^\circ + \mathrm{ZEA} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{ZEA} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$ Επειδή $\mathrm{Z} = \mathrm{ZEA}$ το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

12708.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ.
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $\mathrm{B\hat{H}E} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}$.

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΓΖΔ έχουν:

• ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση

• ΒΗ = ΓΔ, από την υπόθεση

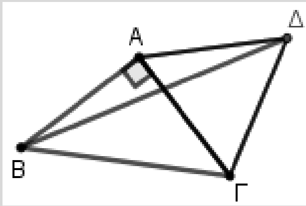
- $B = \Gamma = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, ΕΗ = ΖΔ και απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες BHE και $\Gamma\Delta Z$.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΗ και ΓΖΔ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΖ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $H = \Delta$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα ΚΕΔ και ΒΕΗ έχουν τη γωνία Ε κοινή και $H = \Delta$, επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta KE = B$.

12709.Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 90^\circ$.Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.



Λύση

α) Επειδή ΑΒ = ΑΓ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε $B = \Gamma$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 45^\circ = \Gamma$$

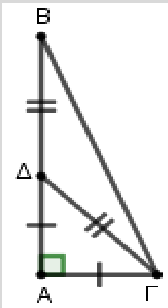
β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι ΑΔ = ΑΓ. Όμως ΑΒ = ΑΓ, άρα ΑΒ = ΑΔ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ .

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\Gamma A\Delta = 60^\circ$, οπότε $BA\Delta = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ, ισχύει ότι $AB\Delta = A\Delta B$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

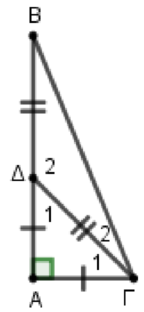
$$AB\Delta + A\Delta B + BA\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2AB\Delta + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2AB\Delta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Leftrightarrow AB\Delta = 15^\circ$$

13442.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$.
Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.



Λύση



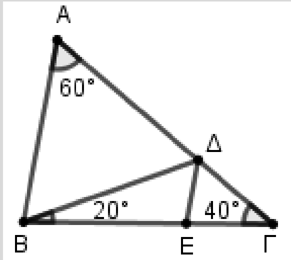
α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι και ισοσκελές οπότε $\Delta_1 = \Gamma_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta_1 + \Gamma_1 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 45^\circ$, άρα $A\Delta\Gamma = 45^\circ$.

β) Επειδή ΒΔ = ΓΔ, το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές, οπότε $B = \Gamma_2$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του.
Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΓ οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\Delta_1 = B + \Gamma_2 \Leftrightarrow 45^\circ = 2B \Leftrightarrow B = 22,5^\circ$

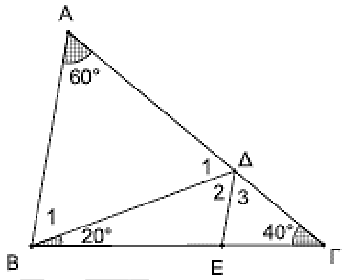
13443.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 60^\circ$ και $\hat{Γ} = 40^\circ$.

Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $ΓΒΔ = 20^\circ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.
β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
i. $Β\hat{Δ}Ε = 60^\circ$.
ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Δ}Γ$.



Λύση

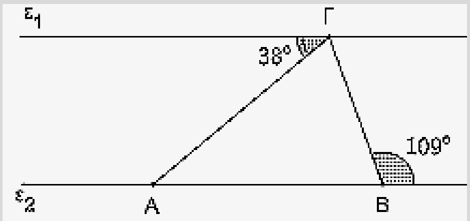
α) Η γωνία $Δ_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή
$Δ_1 = ΓΒΔ + Γ = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.
Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει δύο γωνίες του ίσες με 60°, οπότε και η τρίτη του γωνία, η $Β_1$, θα είναι ίση με 60°, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.



β) i. Είναι $Δ_2 = Β_1 = 60^\circ$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ.

ii. Είναι $Δ_3 = Α = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $Δ_2 = Δ_3 = 60^\circ$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΔΓ$.

13535.Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β.
Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

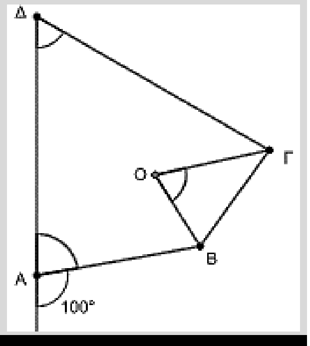


Λύση

α) Είναι $Α = 38^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $ε_1$, $ε_2$ που τέμνονται από την ΑΓ.
Είναι $Β + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow Β = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$Α + Β + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow Γ = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$

β) Επειδή $Β = Γ = 71^\circ$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

13619.Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με
$\hat{Α}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 220^\circ$.
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο Ο, τότε:
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Ο}Γ = 70^\circ$.



Λύση

α) Είναι $A_{εξ} + A = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + A = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \Delta = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΟ έχουμε:

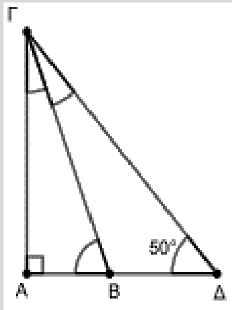
$B O \Gamma + O B \Gamma + O \Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow B O \Gamma + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow B O \Gamma + \frac{B + \Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow B O \Gamma + \frac{220^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$B O \Gamma + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B O \Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B = 50^\circ$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.



Λύση

α) Είναι $AB\Gamma - A\Gamma B = 50^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow AB\Gamma = A\Gamma B + 50^\circ \; (1)$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $A + AB\Gamma + A\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + A\Gamma B + 50^\circ + A\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2A\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \Leftrightarrow A\Gamma B = 20^\circ$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $AB\Gamma = A\Gamma B + 50^\circ = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$

β) Η γωνία ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΔ, οπότε

$AB\Gamma = B\Gamma\Delta + \Delta \Leftrightarrow 70^\circ = B\Gamma\Delta + 50^\circ \Leftrightarrow B\Gamma\Delta = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$

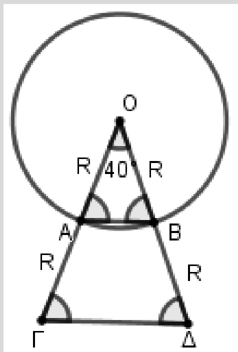
Επειδή $B\Gamma\Delta = A\Gamma B$, η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Gamma\Delta$.

13687. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $AOB = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΓ = ΟΑ και ΒΔ = ΟΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 70^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{\Gamma}\Delta$ και $O\hat{\Delta}\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R. Επομένως, οι γωνίες ΟΑΒ και ΟΒΑ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ. Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$O + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2OAB = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2OAB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow OAB = 70^\circ = OBA$

β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R και ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$O + O\Gamma\Delta + O\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2O\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2O\Gamma\Delta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow O\Gamma\Delta = 70^\circ = O\Delta\Gamma$.

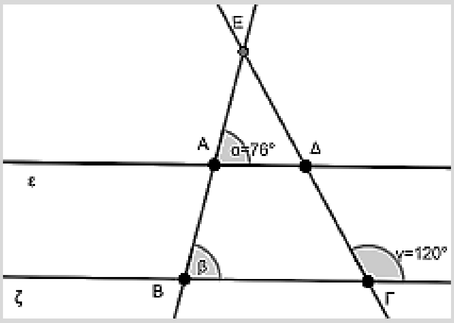
γ) Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ΟΑ΄Β΄ και ΟΓ΄Δ ίσες. Επομένως, ΑΒ//ΓΔ.

13741.Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha}=76^\circ$ και $\hat{\gamma}=120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .

γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.



Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\hat{\alpha}=\hat{\beta}=76^\circ$.

β) Η γωνία Γ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma}=120^\circ$, έτσι

$\Gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Οι γωνίες Γ και Δ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε $\Gamma + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Η γωνία Α του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha}=76^\circ$.

Έτσι $A+\hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\hat{\alpha}=76^\circ$. Επιπλέον η γωνία $A\Delta E$ του τριγώνου είναι η παραπληρωματική της γωνίας Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε

$A\Delta E + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

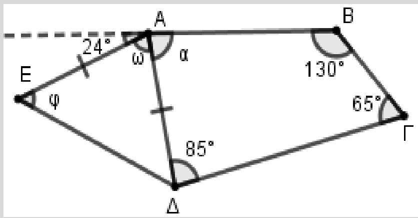
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180^o , οπότε

$A\Delta E + \hat{\alpha} + E = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + E = 180^\circ \Leftrightarrow E = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$

13749.Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α.

Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$ **β)** Τη γωνία $\hat{\omega}$ **γ)** Τη γωνία $\hat{\varphi}$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

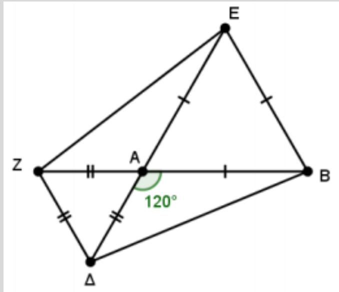
$\hat{\alpha} + 85^\circ + 65^\circ + 130^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$

β) Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 80^\circ + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\hat{\varphi}$ είναι ίση με τη γωνία $A\Delta E$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\hat{\omega} = 76^\circ$ από το β) ερώτημα.

Επομένως $\hat{\varphi} = \dfrac{180^\circ - \hat{\omega}}{2} = \dfrac{180^\circ - 76^\circ}{2} = \dfrac{104^\circ}{2} = 52^\circ$.

14884. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A}=120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.
β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.



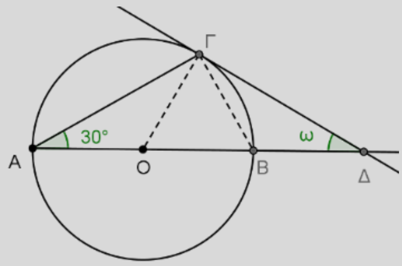
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΕ είναι ισόπλευρα, είναι
$ZA\Delta = AZ\Delta = Z\Delta A = BAE = ABE = BEA = 60^\circ$.
Επειδή $\Delta AB + BAE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. Επειδή $\Delta AB + \Delta AZ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ τα σημεία Ζ, Α, Β είναι συνευθειακά.
Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:
- ΑΖ = ΑΒ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΖ
- ΑΕ = ΑΒ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- $ZAE = \Delta AB$ ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΑΕ είναι ίσα.

β) Είναι $AZ\Delta = ABE = 60^\circ$, όμως οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔΖ, ΒΕ που τέμνονται από την ΖΒ, οπότε οι ευθείες ΖΔ και ΒΕ είναι παράλληλες.

34313. Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή του ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$.
Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) σε σημείο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\Gamma\hat{O}\Delta$.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.
γ) Να αποδείξετε ότι ΟΔ=2R.



Λύση

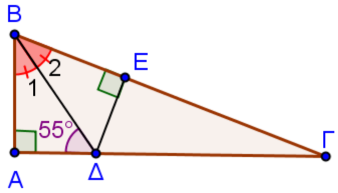
α) Επειδή η ΟΓ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Γ, είναι $O\Gamma \perp \Gamma\Delta$, οπότε $O\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.
Επειδή οι ΟΑ και ΟΓ είναι ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, οπότε $A\hat{\Gamma}O = \hat{A} = 30^\circ$. Η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΑΓ, οπότε $\Gamma\hat{O}\Delta = A\hat{\Gamma}O + \hat{A} = 60^\circ$.

β) Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}O + O\hat{\Gamma}\Gamma = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ έχουμε: $\hat{A} + A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 120^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow$
$\hat{\omega} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

γ) ΤΑ ΟΓ, ΟΒ είναι ακτίνες του κύκλου, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές. Επειδή επιπλέον έχει $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο, οπότε $B\Gamma = R$. Είναι $O\hat{\Gamma}B = 60^\circ$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ - O\hat{\Gamma}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
Επειδή $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\omega}$, το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΓΔ, άρα ΒΔ = ΒΓ= R. Είναι ΟΔ= ΟΒ + ΒΔ= R + R = 2R.

34397. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $BE=AB$.
β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A=55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΔ κοινή και
2) $B_1=B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Β, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BE=AB$.

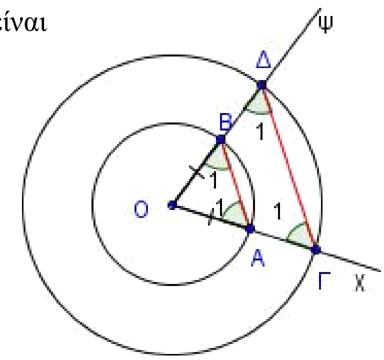
β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$B\Delta A+B_1=90^\circ \Leftrightarrow 55^\circ+B_1=90^\circ \Leftrightarrow B_1=35^\circ=B_2 \Leftrightarrow \frac{B}{2}=35^\circ \Leftrightarrow B=70^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$B+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow 70^\circ+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma=20^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ, έχουμε:
$\Gamma\Delta E+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\Delta E=90^\circ-20^\circ=70^\circ$. Τέλος $E=90^\circ$.

34413. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία xΟψ. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ,Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Λύση



Επειδή $OA=OB$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, άρα $A_1=B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΟΑΒ, έχουμε:

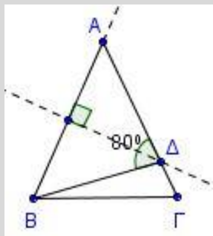
$$O+A_1+B_1=180^\circ \Leftrightarrow 2B_1=180^\circ-O \Leftrightarrow B_1=\frac{180^\circ-O}{2} \quad (1)$$

Επειδή $O\Gamma=O\Delta$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΓΔ, άρα $\Gamma_1=\Delta_1$.Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΟΓΔ, έχουμε:

$$O+\Gamma_1+\Delta_1=180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1=180^\circ-O \Leftrightarrow \Delta_1=\frac{180^\circ-O}{2} \quad (2).$$

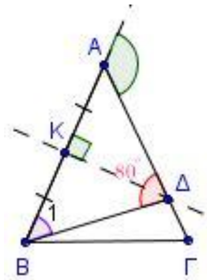
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B_1=\Delta_1$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι και εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΟΔ, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

34418. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.
β)Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό σημείο Δ. Αν η γωνία $A\hat{\Delta}B$ ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $A_{εξ} = B + Γ$. Όμως $A_{εξ} = 2B$, άρα $2B = B + Γ \Leftrightarrow 2B - B = Γ \Leftrightarrow B = Γ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, δηλαδή $AB = AΓ$.



β) Στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, οπότε $A = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ, έχουμε:

$AΔB + A + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2A = 180^\circ \Leftrightarrow 2A = 100^\circ \Leftrightarrow A = 50^\circ$

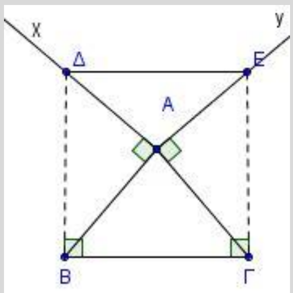
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$A + B + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = Γ$

34422. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AΓ$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AΓ$. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $BΔ = ΓE$.

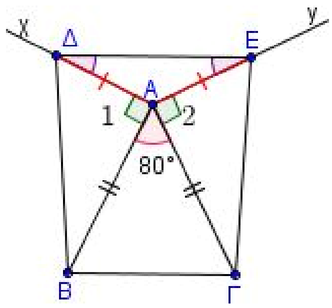
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία Α, Ε και Δ.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

1) $AB = AΓ$ και
2) $AΔ = AE$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BΔ = ΓE$.



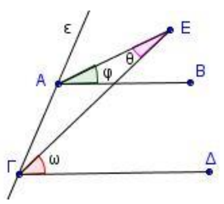
β) Είναι $ΔAE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Επειδή $AΔ = AE$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, άρα $E = Δ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΑΕ έχουμε:

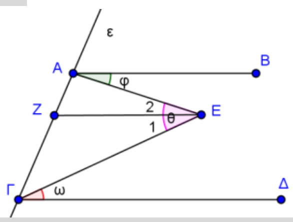
$E + Δ + ΔAE = 180^\circ \Leftrightarrow 2E + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 80^\circ \Leftrightarrow E = 40^\circ = Δ$

34770. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε: $\hat{ω} = \hat{φ} + \hat{θ}$.



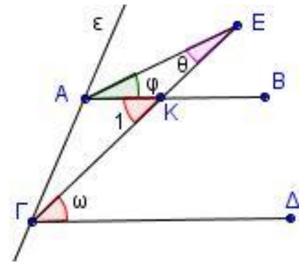
β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $θ = \hat{φ} + \hat{ω}$.



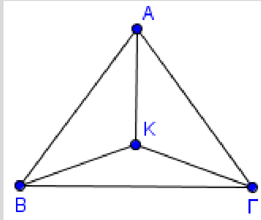
Λύση

α) Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΑΒ. Είναι $K_1 = ω$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ. Η γωνία K_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΕ, άρα $K_1 = \hat{θ} + φ \Leftrightarrow ω = \hat{θ} + φ$

β) Έστω τώρα ότι το Ε βρίσκεται ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Τότε $\omega = \hat{\theta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ και $\varphi = \hat{\theta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΕ. Είναι $\varphi + \omega = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}$.

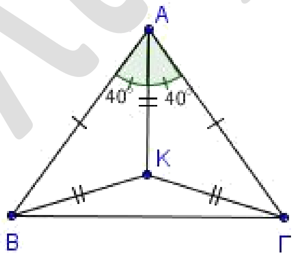


34775. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{Α} = 80^\circ$.
Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.
β) Να υπολογίσετε:
i. τις γωνίες ΑΒΚ και ΑΓΚ.
ii. τη γωνία $Β\hat{Κ}Γ$.



Λύση

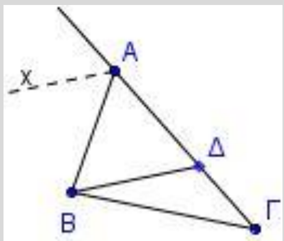
α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα επειδή έχουν τρείς πλευρές ίσες μία προς μία:
ΚΑ κοινή, ΒΚ= ΚΓ και ΑΒ = ΑΓ



β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $Β = Γ$.
Επειδή η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, είναι $ΒΑΚ = ΚΑΓ = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.
Επειδή $ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ$, τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα $ΑΒΚ = ΒΑΚ = 40^\circ$ και $ΚΓΑ = ΚΑΓ = 40^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:
$ΑΚΒ + ΑΒΚ + ΒΑΚ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΚΒ = 100^\circ$
Όμοια στο τρίγωνο ΑΓΚ προκύπτει ότι $ΑΚΓ = 100^\circ$.

γ) Είναι $ΒΚΓ = 360^\circ - ΑΚΒ - ΑΚΓ = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$

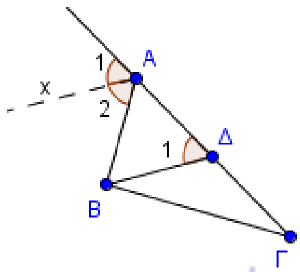
34778. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{Α}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $Α\hat{Β}Δ = 60^\circ$ **ii.** το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.
β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.



Λύση

α) i) $ΑΒΔ = Α_2 = \frac{Α_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

ii) Είναι $Δ_1 = Α_1 = \frac{Α_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.

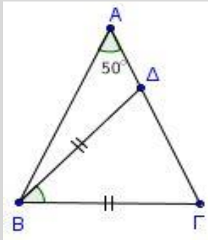


Στο τρίγωνο ΑΒΔ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60°, άρα και η τρίτη του γωνία θα είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

iii) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ$.
Είναι $ΔΓ = ΑΓ - ΑΔ = ΑΓ - ΑΒ$

β) Είναι $ΒΔΑ = 60^\circ$ και $ΒΔΑ = 2Γ \Leftrightarrow Γ = 30^\circ$. $ΒΔΓ = 180^\circ - ΒΔΑ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ, έχουμε:
$ΔΒΓ + Γ + ΒΔΓ = 180^\circ \Leftrightarrow ΔΒΓ + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΔΒΓ = 30^\circ$.

34785. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 50^\circ$.
Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι $ΔΒΓ = Α$.

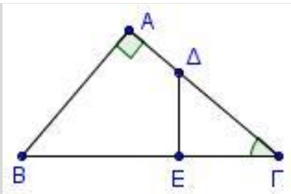


Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι: $Β = Γ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$Α + Β + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2Β = 180^\circ \Leftrightarrow 2Β = 130^\circ \Leftrightarrow Β = 65^\circ = Γ$

β) Επειδή $ΒΔ = ΒΓ$, το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΓ, άρα $ΒΔΓ = Γ = 65^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ έχουμε:
$ΔΒΓ + ΒΔΓ + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow ΔΒΓ + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΔΒΓ = 50^\circ = Α$

34786. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^\circ)$ με $\hat{Γ} = 40^\circ$.
Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $ΔΕ \perp ΒΓ$.
Να υπολογίσετε:
α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.
β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ.



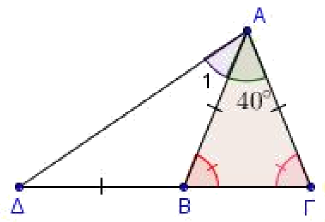
Λύση

α) Επειδή $Δ\hat{Ε}Γ = 90^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ, έχουμε:
$ΕΔΓ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΔΓ + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΔΓ = 50^\circ$

β) Αρχικά είναι $Α = Ε = 90^\circ$.
$ΑΔΕ + ΕΔΓ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΔΕ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΔΕ = 130^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$Β + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Β + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow Β = 50^\circ$

34787. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{Α} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$. Να υπολογίσετε
α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) τη γωνία $Δ\hat{Α}Γ$.

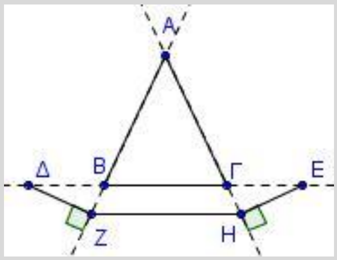
Λύση



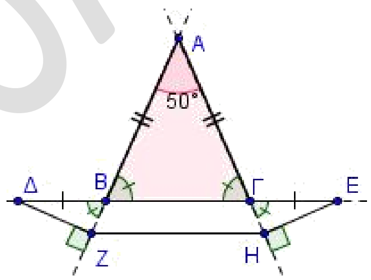
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι: $B = \Gamma$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$

β) Επειδή $B\Delta = AB$, το τρίγωνο ΒΔΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $\Delta = A_1$. Η γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΑ, άρα $B = \Delta + A_1 \Leftrightarrow 70^\circ = 2\Delta \Leftrightarrow \Delta = 35^\circ = A_1$. Είναι $\Delta A\Gamma = A + A_1 = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$

34500. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $BZ = \Gamma H$.
ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.



Λύση

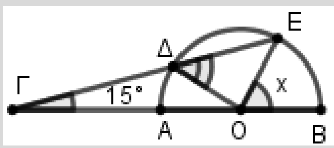


α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ έχουν:
1) $B\Delta = \Gamma E$ και
2) $\Delta BZ = E\Gamma H$ γιατί είναι κατακορυφήν των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BZ = \Gamma H$.

ii. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $BZ = \Gamma H$, είναι και $AB + BZ = A\Gamma + \Gamma H \Leftrightarrow AZ = AH$, άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

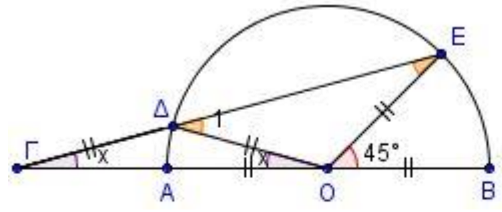
β) Επειδή το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ, είναι $Z = H$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΗ έχουμε:
$A + Z + H = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2Z = 130^\circ \Leftrightarrow Z = 65^\circ = H$

34505. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι 15°, τότε
α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$.
β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B = x$.



Λύση

Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε $OA = OB = OE = \Gamma\Delta = O\Delta = \rho$.
Επειδή $\Gamma\Delta = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΓ, άρα $\Delta OA = \Gamma = x$.

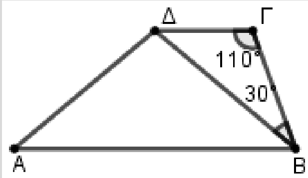


Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΔ, άρα $\Delta_1 = \Delta OA + \Gamma = 2x$.
Επειδή $OE = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, οπότε $E = \Delta_1 = 2x$.

Η γωνία BOE είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΟΕ, άρα

$BOE = E + \Gamma \Leftrightarrow 45^\circ = 2x + x \Leftrightarrow 3x = 45^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$

34506. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110°$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.



Λύση

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΓ, ΑΒ που τέμνονται από τη ΒΓ, επομένως $\hat{\Gamma} + A\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + A\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 70^\circ$.

Όμως $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow 70^\circ = A\hat{B}\Delta + 30^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}\Delta = 40^\circ$.

Επειδή ΒΔ=ΑΔ το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Delta = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε: $A\hat{\Delta}B + \Delta\hat{A}B + A\hat{B}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow$

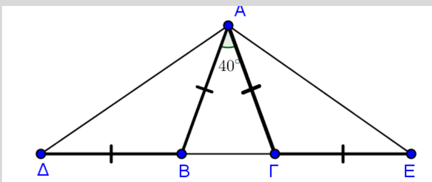
$A\hat{\Delta}B + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}B = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

36087. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ και έχει $B = \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$

Οι γωνίες ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ, άρα

$AB\Delta = A\Gamma E = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

1) $\Delta B = \Gamma E$
2) $BA = A\Gamma$ και
3) $AB\Delta = A\Gamma E = 110^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

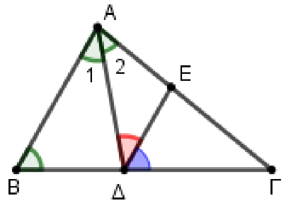
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα έχουν και $A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

36101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ.

Λύση



α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ+20^\circ+\Gamma+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$2\Gamma=80^\circ \Leftrightarrow \Gamma=40^\circ \text{ και } \mathrm{B}=20^\circ+40^\circ=60^\circ$$

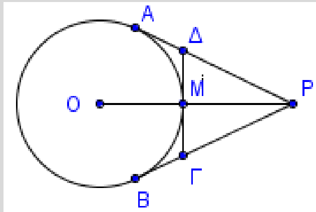
β) Είναι $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2=\dfrac{\mathrm{A}}{2}=40^\circ$

Είναι $\mathrm{E}\Delta\mathrm{A}=\mathrm{A}_2=40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ και $\mathrm{E}\Delta\Gamma=\mathrm{B}=60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ,ΒΓ που τέμνονται από την ΒΓ. $\Delta\mathrm{E}\Gamma=180^\circ-\mathrm{AE}\Delta=80^\circ$.

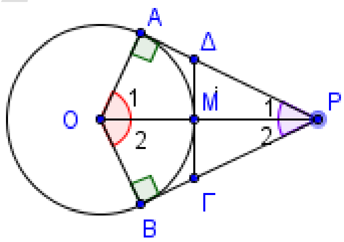
36114. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{B}=40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.



Λύση



α) Επειδή η ΟΜ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων. Στο τρίγωνο ΡΓΔ η ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα ΟΑ και ΟΒ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής, είναι κάθετες στις εφαπτομένες. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΡ έχουμε:

$\mathrm{O}_1+\mathrm{P}_1=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{O}_1+20^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{O}_1=70^\circ$.

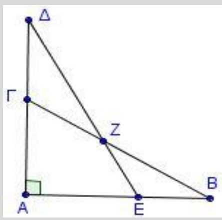
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΡ έχουμε:

$\mathrm{O}_2+\mathrm{P}_2=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{O}_2+20^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{O}_2=70^\circ$. Είναι $\mathrm{AOB}=\mathrm{O}_1+\mathrm{O}_2=140^\circ$.

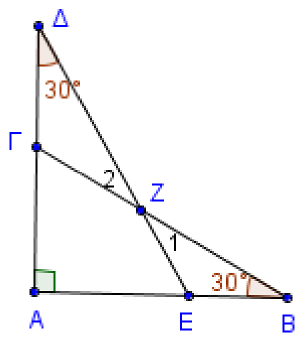
36117. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=30^\circ$ και Ζ το σημείο τομής των πλευρών τους ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα..

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.



Λύση



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{B}+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma=60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$\Delta+\mathrm{AE}\Delta=90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ+\mathrm{AE}\Delta=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{AE}\Delta=60^\circ$.

Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, άρα

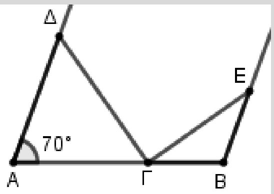
$\mathrm{E}=\mathrm{Z}_1+\mathrm{B} \Leftrightarrow 60^\circ=\mathrm{Z}_1+30^\circ \Leftrightarrow \mathrm{Z}_1=30^\circ$.

Είναι $\Gamma\mathrm{ZE}=180^\circ-\mathrm{Z}_1=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

β) Επειδή $\mathrm{Z}_1=\mathrm{B}=30^\circ$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

Είναι $Z_2 = Z_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, άρα $Z_2 = \Delta$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.

36118. Στο διπλανό σχήμα, οι ΑΔ, ΒΕ είναι παράλληλες.
Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = A\Gamma$, $BE = B\Gamma$ και $\hat{A} = 70^\circ$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΓ και ΒΓΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

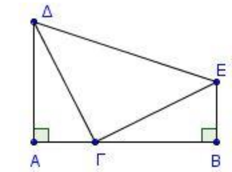


Λύση

α) Επειδή $A\Delta = A\Gamma$, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΓ, άρα $\Delta = A\Gamma\Delta$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΓ, έχουμε:
$A + \Delta + A\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta = 110^\circ \Leftrightarrow \Delta = 55^\circ = A\Gamma\Delta$.
Οι γωνίες Α και Β είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 110^\circ$
Επειδή $BE = B\Gamma$, το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΓ, άρα $B\Gamma E = E$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:
$B + B\Gamma E + E = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2E = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 70^\circ \Leftrightarrow E = 35^\circ = B\Gamma E$.

β) Είναι $\Delta\Gamma E = 180^\circ - A\Gamma\Delta - B\Gamma 5 = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$

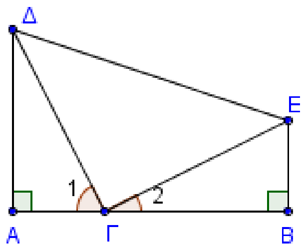
36163. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.
β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



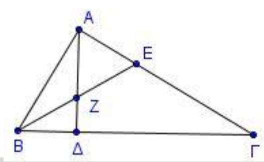
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ και 2) $A\Gamma = BE$, οπότε έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα, είναι και $\Delta\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ έχουμε:
$E\Gamma B + E = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + E = 90^\circ \Leftrightarrow E = 50^\circ$.
Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα, είναι και $\Gamma_1 = E = 50^\circ$.
Είναι $\Delta\Gamma E = 180^\circ - \Gamma_1 - E\Gamma B = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

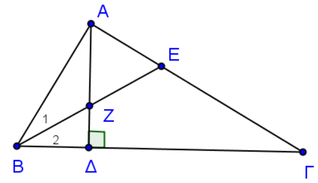


36167. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.
α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 60^\circ$.
β) Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $A + B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $A + \Gamma = 2B$, άρα
$2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$.



β) Επειδή $B = 60^\circ$ είναι $A + \Gamma = 2B = 120^\circ$. Όμως $A = 3\Gamma$, άρα

$3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$. Τότε

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ από το
άθροισμα γωνιών του έχουμε:

$B_1 + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{B}{2} + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow AEB = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta A\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma = 60^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

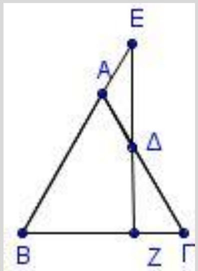
$AEB + \Delta A\Gamma + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow AZE = 60^\circ$

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει τις γωνίες του ίσες είναι ισόπλευρο.

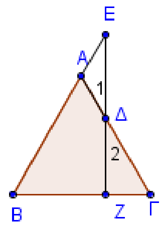
36228. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.



Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60°. Άρα $\Delta AE = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, έχει $\Delta_1 = E$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$\Delta_1 + E + \Delta AE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ = E$

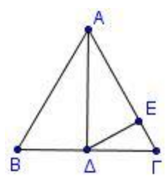
β) Είναι $\Delta_2 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν και $\Gamma = 60^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι $\Delta Z\Gamma = 90^\circ$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

36336. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $\Delta A\Gamma = BA\Delta = 30^\circ$, επομένως $A = 60^\circ$.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει μια γωνία του ίση με 60°, είναι ισόπλευρο.

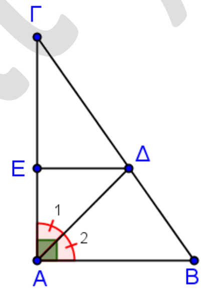
β) Επειδή $ΑΔ = ΑΕ$ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, άρα $ΑΔΕ = ΑΕΔ$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$$ΔΑΓ + ΑΔΕ + ΑΕΔ = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2ΑΔΕ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2ΑΔΕ = 150^\circ \Leftrightarrow ΑΔΕ = 75^\circ = ΑΕΔ$$

γ) $ΕΔΓ = ΑΔΓ - ΑΔΕ = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

37009. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.
γ) Αν η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

Λύση



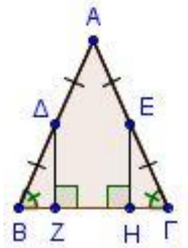
α) Είναι $ΑΓ \perp ΑΒ$ και $ΑΒ \parallel ΔΕ$, άρα είναι και $ΑΓ \perp ΔΕ$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $Α_1 = \frac{Α}{2} = 45^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ προκύπτει ότι $ΑΔΕ = 45^\circ$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$Β + Γ = 90^\circ$, όμως $Β = Γ + 20^\circ$, άρα $Γ + 20^\circ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 2Γ = 70^\circ \Leftrightarrow Γ = 35^\circ$ και $Β = 55^\circ$.
Είναι $ΕΔΓ = Β = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΓ.

37013. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.
β) Αν $\hat{Α} = 75^\circ + \hat{Β}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

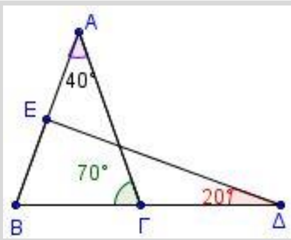


α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:
1) $ΔΒ = ΕΓ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και
2) $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και μια οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΔΖ = ΕΗ$. δηλαδή τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$Α + Β + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + Β + Β + Β = 180^\circ \Leftrightarrow 3Β = 105^\circ \Leftrightarrow Β = 35^\circ = Γ \text{ και } Α = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$

37014. Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,
β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ+\mathrm{B}+70^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B}=70^\circ$

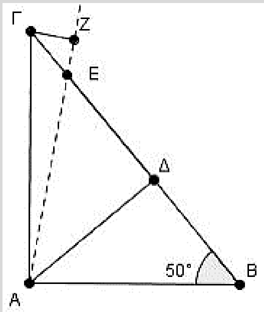
Επειδή $\mathrm{B}=70^\circ=\Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΔ έχουμε:

$\mathrm{BE}\Delta+\mathrm{B}+\Delta=180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{BE}\Delta+70^\circ+20^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{BE}\Delta=90^\circ$, άρα και $\mathrm{AE}\Delta=90^\circ$.

Θέμα 4ο

1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}}=90^\circ\right)$ με $\hat{\mathrm{B}}=50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

ii. $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $\mathrm{AEB}=\mathrm{B}=50^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι:

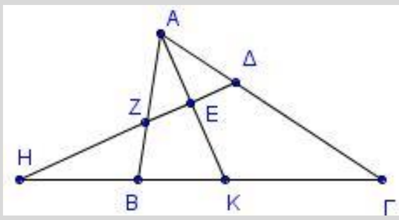
$\mathrm{EAB}+\mathrm{AEB}+\mathrm{B}=180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{EAB}+2\cdot 50^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{EAB}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

Είναι $\mathrm{EAB}+\Gamma\mathrm{AE}=90^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 80^\circ+\Gamma\mathrm{AE}=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\mathrm{AE}=10^\circ$.

β) Είναι $\Gamma\mathrm{EZ}=\mathrm{AEB}=50^\circ$ ως κατακορυφήν.

Επειδή $\Gamma\mathrm{ZE}=90^\circ$, στο τρίγωνο ΓΖΕ ισχύει ότι: $\Gamma\mathrm{EZ}+\mathrm{E}\Gamma\mathrm{Z}=90^\circ \Leftrightarrow 50^\circ+\mathrm{E}\Gamma\mathrm{Z}=90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{E}\Gamma\mathrm{Z}=40^\circ$

1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A}\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ+\dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$

β) $\mathrm{ZK}=\mathrm{K}\Delta$

γ) $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{H}}\Gamma=\dfrac{\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{AZE}=\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ έχουμε: $\mathrm{A}+\mathrm{AZE}+\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=180^\circ \Leftrightarrow 2\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=180^\circ-\mathrm{A} \Leftrightarrow$

$\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=90^\circ-\dfrac{\mathrm{A}}{2}$. Είναι $\mathrm{Z}\Delta\Gamma=180^\circ-\mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=180^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)=90^\circ+\dfrac{\mathrm{A}}{2}$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το Κ είναι σημείο της, άρα ισαπέχει από τα Ζ και Δ, δηλαδή $ZK = K\Delta$.

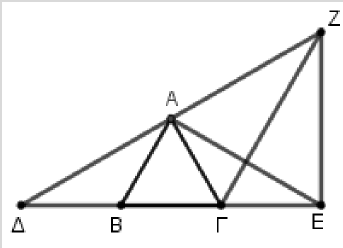
γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ έχουμε:

$$Z\hat{H}\Gamma + Z\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} \ (1).$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $Z\hat{H}\Gamma = \dfrac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{A} - 2\hat{\Gamma}}{2} = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

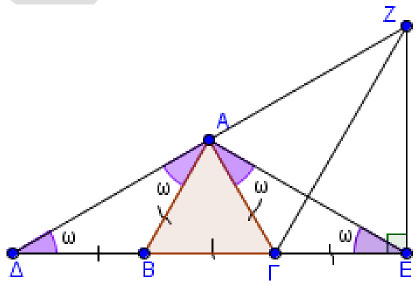
1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.
β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.
γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οι γωνίες του είναι ίσες με 60°. Είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Επειδή $AB = A\Delta = A\Gamma = \Gamma E$, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα και ισοσκελή. Έστω ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$A\hat{B}\Delta + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$$

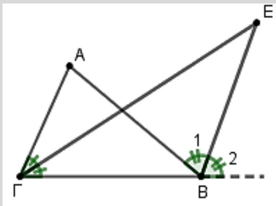
β) Επειδή $A\Gamma = \Gamma E$, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.
Είναι $\Gamma\hat{A}Z = \omega + \hat{A} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \Delta\hat{A}\Gamma$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν:
1) τη πλευρά ΓΖ κοινή και
2) $A\Gamma = \Gamma E$,
Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ZA = ZE$.
Δηλαδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επειδή το Γ και το Ζ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΖ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή

$$A\hat{\Gamma}Z = Z\hat{\Gamma}E = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Οι γωνίες ΑΒΓ και ΖΓΕ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΓ και είναι ίσες, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ είναι παράλληλες.

1851. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του Β τέμνονται στο Ε.
Δίνεται ότι $\mathrm{A\hat{B}E} = 70^\circ = 2\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

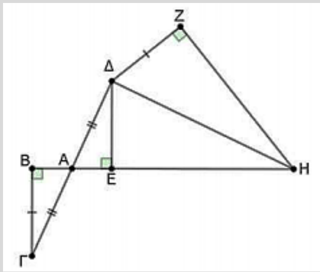


Λύση

α) Επειδή ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β εξωτερικής, ισχύει ότι $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = 70^\circ$.
Είναι $2\Gamma\mathrm{EB} = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma\mathrm{EB} = 35^\circ$.
Η γωνία B_2 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΒΕ οπότε $\mathrm{B}_2 = \Gamma\mathrm{EB} + \mathrm{E}\Gamma\mathrm{B} \Leftrightarrow 70^\circ = 35^\circ + \mathrm{E}\Gamma\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{E}\Gamma\mathrm{B} = 35^\circ$.
Επειδή $\mathrm{E}\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\mathrm{EB}$ το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές. Είναι $\mathrm{B}_2 + \Gamma\mathrm{BE} = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\mathrm{BE} = 110^\circ$

β) Επειδή ΓΕ διχοτόμος της γωνίας Γ και $\mathrm{E}\Gamma\mathrm{B} = 35^\circ$, είναι $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{B} = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$
Είναι $\mathrm{B}_{\varepsilon\xi} + \mathrm{AB}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \mathrm{AB}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{AB}\Gamma = 40^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι: $\mathrm{A} + \mathrm{AB}\Gamma + \mathrm{A}\Gamma\mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A} = 70^\circ$

11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\mathrm{A\hat{B}}\Gamma$, $\mathrm{A\hat{E}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$, αντίστοιχα.
Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.
β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E\hat{H}Z}$.
γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \dfrac{\mathrm{E\hat{H}Z}}{2}$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν: ΑΓ = ΑΔ (υπόθεση) και $\mathrm{BA}\Gamma = \Delta\mathrm{AE}$ ως κατακορυφήν.
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.
Επομένως έχουν και ΒΓ = ΔΕ.

β) Είναι ΔΕ = ΒΓ = ΔΖ, οπότε το Δ ισαπέχει από τις ΗΑ και ΗΖ, άρα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας ΕΗΖ. Δηλαδή η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΗΖ.

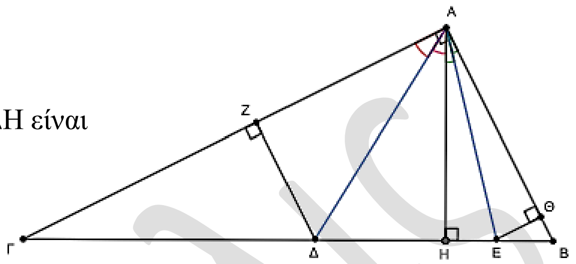
γ) Επειδή η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΗΖ, ισχύει $\Delta\mathrm{HE} = \dfrac{\mathrm{EHZ}}{2}$ (1).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΗ είναι $\Delta\mathrm{AE} + \Delta\mathrm{HE} = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\mathrm{HE} = 90^\circ - \Delta\mathrm{AE}$ (2).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ είναι $\mathrm{A}\Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{AE} = 90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = 90^\circ - \Delta\mathrm{AE}$ (3).
Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{EHZ}}{2}$.

13499.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΔΒ = ΑΒ και ΓΕ = ΓΑ. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}H$ και $E\hat{A}B=H\hat{A}E$.

β) ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ.

Λύση



α) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$\Gamma A\Delta=\Gamma AB-\Delta AB=90^\circ-\Delta AB\,(1)$.

Οι γωνίες ΔAH και $A\Delta H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta AH=90^\circ-A\Delta H\,(2)$.

Αφού ΒΔ = ΒΑ, το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΔΑ, οπότε οι γωνίες ΔAB και $A\Delta H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta AB=A\Delta H\,(3)$.

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma A\Delta=\Delta AH\,(4)$.

Έχουμε, επίσης, ότι: $EAB=\Gamma AB-\Gamma AE=90^\circ-\Gamma AE\,(5)$.

Οι γωνίες HAE και AEH του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$HAE=90^\circ-AEH$ (6).

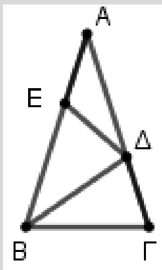
Αφού ΓΕ = ΓΑ, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΕΑ, οπότε οι γωνίες ΓAE και AEH θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Gamma AE=AEH$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $EAB=HAE$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $EAB=HAE$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας HAB του τριγώνου ΑΗΒ. Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ κι επομένως είναι ΕΗ = ΕΘ.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $\Gamma A\Delta=\Delta AH$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΑΓ του τριγώνου ΑΗΓ. Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι ΔΗ = ΔΖ. Συνεπώς, ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ.

13537.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε ΑΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:

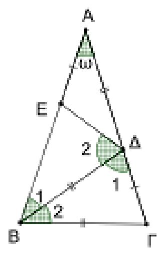
i. $\hat{\Gamma}=2\hat{A}$

ii. $A=36^\circ$

iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

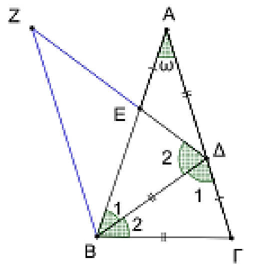
Λύση



α) Έστω $A=\omega$ (1).

i. Γνωρίζουμε ότι ΑΔ = ΒΔ, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B_1=\omega\,(2)$

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΒ, οπότε $\Delta_1=B_1+A=2\omega$ (3). Είναι ΒΓ = ΒΔ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma=\Delta_1=2\omega$ (4).



Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\Gamma = 2A$.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $B = \Gamma = 2\omega$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = \dfrac{180^\circ}{5} = 36^\circ$, άρα

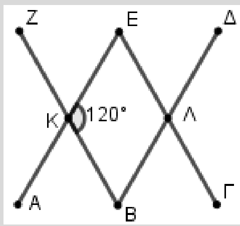
$A = 36^\circ$.

iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΔΕ. Όμως από τα δεδομένα είναι ΑΕ = ΔΓ, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΔΓ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΔ τα οποία έχουν:
- ΒΔ κοινή πλευρά.
- ΒΓ = ΒΕ, γιατί ΒΓ = ΑΔ από τα δεδομένα και ΒΕ = ΑΔ ως διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΓΔ.
- $B_1 = B_2$ αφού $B_1 = \omega = 36^\circ$ (ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο) και $B_2 = B - B_1 = 2\omega - \omega = \omega = 36^\circ$.

Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1, B_2, δηλαδή ΔΕ = ΔΓ.

β) Στην ισότητα των τριγώνων ΒΓΔ και ΒΕΔ έχουμε αποδείξει ότι ΒΓ = ΒΕ, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta_1 = \Delta_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\Delta_1 = 72^\circ$ άρα και $\Delta_2 = 72^\circ$.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:
- ΒΓ = ΒΔ, από τα δεδομένα.
- ΑΓ = ΖΔ, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\Gamma = \Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.



13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ.
Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120^o.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^\circ$.
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα.
Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Λύση

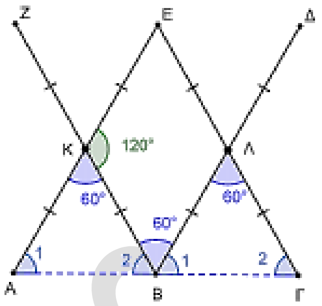
α) Οι γωνίες ΑΚΒ και ΒΚΕ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει

$AKB + BKE = 180^\circ \Leftrightarrow AKB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AKB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (1)

Είναι $AKB = KB\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΔ με τέμνουσα την ΒΖ.

Όμως $AKB = 60^\circ$ από τη σχέση (1) οπότε $KB\Lambda = 60^\circ$ (2).

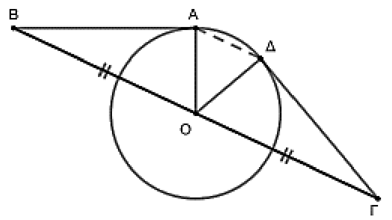
Είναι $K B \Lambda = B \Lambda \Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΖ και ΓΕ με τέμνουσα την ΒΔ.
Όμως $K B \Lambda = 60^\circ$ από σχέση (2), οπότε $B \Lambda \Gamma = 60^\circ$ (3)
Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A K B = K B \Lambda = B \Lambda \Gamma = 60^\circ$ (4)



β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:
• ΑΚ = ΒΛ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
• ΚΒ = ΛΓ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
• $A K B = B \Lambda \Gamma = 60^\circ$, από σχέση (4)
Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $A_1 = B_1$ και $B_2 = \Gamma_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ, ΛΓ και ΚΑ, ΛΒ αντίστοιχα.
Επειδή είναι ΑΚ= ΚΒ = 20 cm, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $A_1 = B_2$ (5).
Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι $A_1 + A K B + B_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2A_1 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$
$2A_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow A_1 = 60^\circ$ (6).
Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $A K B = A_1 = B_2 = 60^\circ$. Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60°, δηλαδή $B \Lambda \Gamma = \Gamma_2 = B_1 = 60^\circ$.

γ) Για να είναι τα Α, Β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ευθεία γωνία. Είναι $A B \Gamma = B_2 + K B \Lambda + B_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $B_2 = B_1 = 60^\circ$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

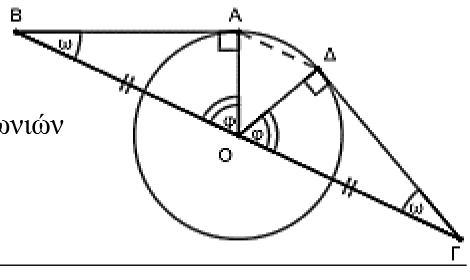
13750. Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** ΑΒ = ΔΓ **ii.** ΑΔ // ΒΓ)
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. $OA \perp AB$ και $O\Delta \perp \Delta\Gamma$ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, τα οποία έχουν:
• ΟΑ = ΟΔ, ακτίνες του κύκλου
• ΟΒ = ΟΓ, από την υπόθεσή
• $O A B = O \Delta \Gamma = 90^\circ$, αφού $OA \perp AB$ και $O\Delta \perp \Delta\Gamma$
Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.
Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ.
ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $O B A = O \Gamma \Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΔ αντίστοιχα. Επίσης είναι $A O B = \Delta O \Gamma = \varphi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, με ω + φ = 90° (1), ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.



Για τη γωνία ΑΟΔ έχουμε:

$A\hat{O}\Delta = 180^\circ - 2\varphi = 2\left(90^\circ - \varphi\right) = 2\omega$ λόγω της (1).

Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ = ΟΔ = R.

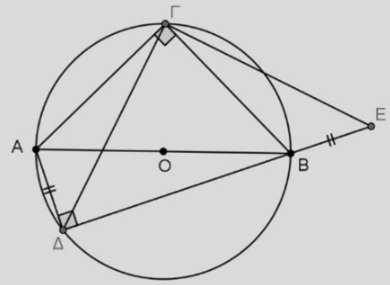
Για τις ίσες του γωνίες $O\hat{A}\Delta$ και $O\hat{\Delta}A$ έχουμε:

$$O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^\circ - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = \frac{2\left(90^\circ - \omega\right)}{2} = 90^\circ - \omega = \varphi \text{ λόγω της (1).}$$

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε ΑΔ//ΒΓ.

β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού ΟΑ = ΑΒ = ΟΔ = ΔΓ = R. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45^o. Τότε $A\hat{O}\Delta = 180^\circ - 2\varphi = 90^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

34316.Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και διάμετρός του ΑΒ. Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Delta}B = 90^\circ$. Στην προέκταση της ΔΒ προς το μέρος του Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ = ΑΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}E$ είναι ίσες,

ii. τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.

iii. η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Λύση

α) i. Στο τετράπλευρο ΑΓΔΒ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = 360^\circ \Leftrightarrow$

$\Gamma\hat{A}\Delta + 90^\circ + \Delta\hat{B}\Gamma + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 180^\circ - \Delta\hat{B}\Gamma$ (1)

Όμως $\Delta\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}E = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{B}E = 180^\circ - \Delta\hat{B}\Gamma$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

1) ΑΓ = ΒΓ γιατί τα τόξα ΑΓ και ΒΓ είναι ίσα και σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές στον ίδιο κύκλο.

2) ΑΔ = ΒΕ υπόθεση

3) $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$ από α)i.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, έχουν και $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E$.

Είναι $A\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$, άρα η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

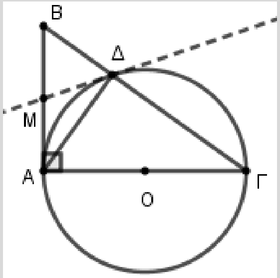
β) Αν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ τότε η ΔΓ διέρχεται από το κέντρο Ο και επειδή η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ, η ακτίνα ΟΓ στη περίπτωση αυτή θα είναι κάθετη στη ΓΕ. Επομένως η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

34329. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο κέντρου Ο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ του τριγώνου σε σημείο Δ.
Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$,

β) $M\hat{\Delta}B=90°-\hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές.

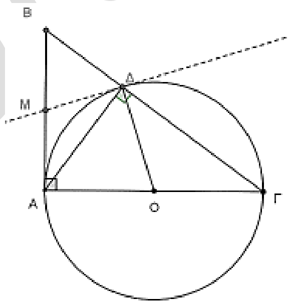
γ) το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.



Λύση

α) Η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΓ έχουμε: $\Gamma\hat{A}\Delta+\hat{\Gamma}+A\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta=90^\circ-\hat{\Gamma}$ (1)
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$\hat{B}+B\hat{A}\Gamma+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}+90^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}=90^\circ-\hat{\Gamma}$ (2).
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$.

β) Τα ΟΓ, ΟΔ είναι ακτίνες του κύκλου οπότε το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές και έχει $O\hat{\Delta}\Gamma=\hat{\Gamma}$ (3).
Η ΟΔ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Δ, άρα $O\Delta \perp \Delta M$, δηλαδή $M\hat{\Delta}0=90^\circ$. Είναι $M\hat{\Delta}B+M\hat{\Delta}O+O\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow$
$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} M\hat{\Delta}B+90^\circ+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow M\hat{\Delta}B=90^\circ-\hat{\Gamma}$.
Επειδή $M\hat{\Delta}B=\hat{B}$, το τρίγωνο ΜΔΒ είναι ισοσκελές.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι:
$M\hat{A}\Delta+90^\circ+\hat{B}=180^\circ \Leftrightarrow M\hat{A}\Delta=90^\circ-\hat{B}$ (4).
Είναι $A\hat{\Delta}B=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}M+M\hat{\Delta}B=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}M+\hat{B}=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}M=90^\circ-\hat{B}$ (5). Από τις (4), (5) προκύπτει ότι $A\hat{\Delta}M=M\hat{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και έχει ΜΑ=ΔΜ (6).
Επειδή το τρίγωνο ΜΑΒ έχει $M\hat{\Delta}B=\hat{B}$, είναι ισοσκελές με βάση την ΔΒ, οπότε ΜΒ=ΔΜ (7). Από τις (6), (7) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

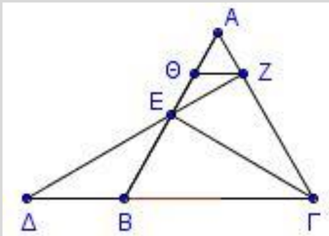
37097. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ.
Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta=\frac{B\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ.

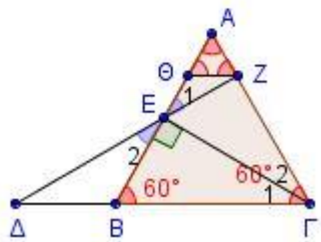
γ) Να αποδείξετε ότι $AE=2\Theta Z$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB=4\Theta B$.



Λύση

α) Έστω α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου.
Το ΓΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Είναι $BE=\frac{BA}{2}=\frac{\alpha}{2}=B\Delta$,άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του Α, ΑΒΓ και ΑΓΒ είναι ίσες με 60°.



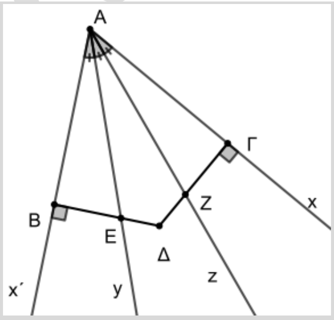
Είναι $A\Theta Z = AB\Gamma = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Ακόμη είναι $AZ\Theta = A\Gamma B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΘΖ και οι τρείς γωνίες του είναι ίσες με 60°, οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Η γωνία ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΔ, άρα $AB\Gamma = \Delta + E_2 \Leftrightarrow 60^\circ = 2E_2 \Leftrightarrow E_2 = 30^\circ$. Είναι $E_1 = E_2 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν.
Είναι $E\Theta Z = 180^\circ - A\Theta Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘΕΖ, έχουμε:
$E\Theta Z + E_1 + \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 30^\circ + \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow \Theta ZE = 30^\circ$

γ) Επειδή $E_1 = \Theta ZE = 30^\circ$, το τρίγωνο ΘΖΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ, άρα $\Theta E = \Theta Z$.
Όμως $\Theta Z = \Theta A$ γιατί είναι πλευρές του ισόπλευρου, άρα $\Theta E = \Theta Z = \Theta A$ και $AE = 2\Theta Z$.

δ) Είναι $\Theta B = \Theta E + EB = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{4}AB \Leftrightarrow 3AB = 4\Theta B$.

37125. Στις πλευρές Αx΄ και Αx γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx΄ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.
β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$.
γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες.

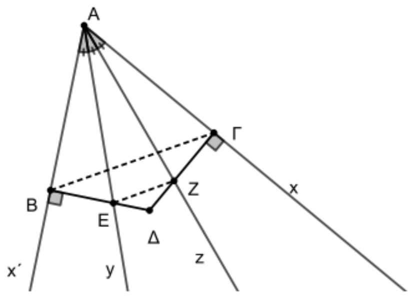


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

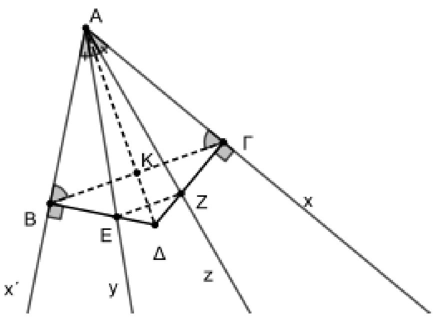
1) ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση και
2) $B\hat{A}E = Z\hat{A}\Gamma$, αφού οι Αy, Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα γιατί έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι ΑΕ = ΑΖ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, άρα το ΕΑΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση, οπότε θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι ΒΔ= ΓΔ και $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, οπότε ΑΔ διχοτόμος της $x'\hat{A}x$.

γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ ισχύει ότι:
$K\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}K$
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ και επομένως είναι $A\hat{\Gamma}K = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$.



Άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}K \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - A\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$

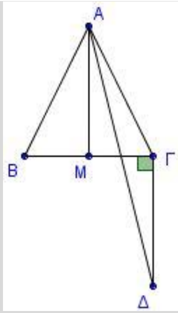
37164. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

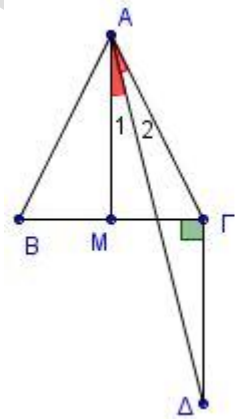
δ) $A\Delta < 2AB$.



Λύση

α) Επειδή ΑΜ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, είναι $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$ είναι και $A\Gamma = \Gamma\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $A_2 = \Delta$. Όμως $A_1 = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, άρα και $A_1 = A_2$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



γ) Είναι $\Delta A\Gamma = \frac{MA\Gamma}{2} = \frac{\frac{BA\Gamma}{2}}{2} = \frac{BA\Gamma}{4}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

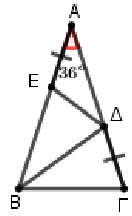
$BA\Gamma + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - 2B$.

Τότε $\Delta A\Gamma = \frac{BA\Gamma}{4} = \frac{180^\circ - 2B}{4} = 45^\circ - \frac{B}{2}$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε:

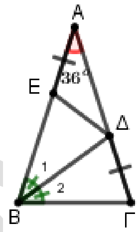
$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$

3ο Θέμα



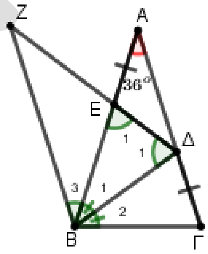
12200. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΕ = ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B = \Gamma$ και $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2B = 144^\circ \Leftrightarrow B = 72^\circ$.

Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της B, ισχύει ότι $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B = 36^\circ$. Επειδή $B_1 = A$, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, οπότε ΑΔ = ΒΔ.



β) Είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΔΓ, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:
$AB - AE = A\Gamma = \Delta\Gamma \Leftrightarrow BE = A\Delta$. Όμως ΑΔ = ΒΔ, οπότε ΒΕ = ΒΔ και το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

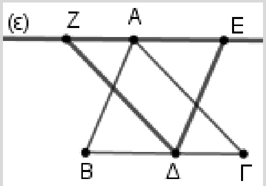
γ) Είναι $B_3 = A = 36^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΒΖ που τέμνονται από την ΑΒ. Επειδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, είναι $\Delta_1 = E_1$. Στο τρίγωνο ΒΔΕ είναι $B_1 + \Delta_1 + E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2\Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 72^\circ$.
Όμως $Z B \Delta = B_1 + B_3 = 72^\circ$, άρα $Z B \Delta = \Delta_1$, οπότε το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

Παραλληλόγραμμο

Θέμα 2ο

13755.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



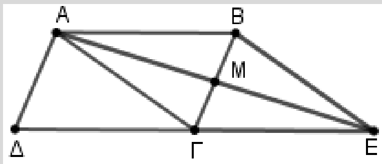
Λύση

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΖΑ // ΔΓ. Από την υπόθεση έχουμε ΖΔ // ΑΓ. Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΑΕ // ΒΔ.
Από την υπόθεση έχουμε ΔΕ // ΒΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:
- ΑΒ = ΔΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- ΒΓ = ΖΕ, διότι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ και ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ και ΒΔ = ΑΕ, ΔΓ =ΖΑ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΖΑΓΔ, ΑΒΔΕ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

13816.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ < ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι :
α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.



Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ και του ΑΕ, οπότε στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

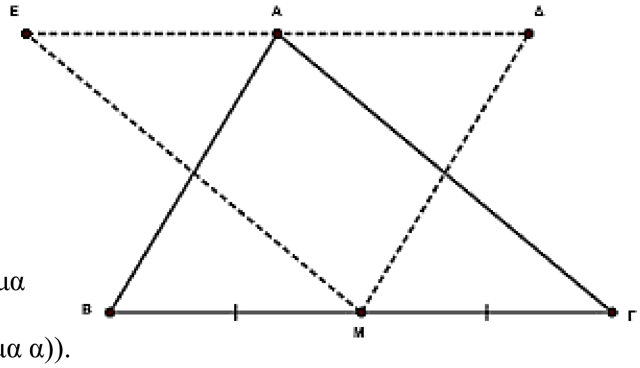
β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε ΔΓ // ΑΒ ως απέναντι πλευρές του. Όμοια από το παραλληλόγραμμο ΑΒΕΓ έχουμε ΑΒ // ΓΕ ως απέναντι πλευρές του. Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ και ΓΕ είναι παράλληλα στην ΑΒ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ, τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

13825.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) ΔΑ=ΑΕ.

Λύση

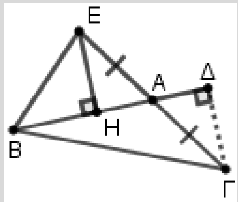
α) Το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει ΑΒ = ΔΜ (από υπόθεση) και ΑΒ // ΔΜ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο

αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΜΔ παράλληλες και ίσες.
Το τετράπλευρο ΑΓΜΕ έχει ΑΓ = ΕΜ (από υπόθεση) και ΑΓ // ΕΜ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις ΑΓ και ΕΔ παράλληλες και ίσες.



β) ΔΑ=ΒΜ (1) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΔΜΒ (που δείξαμε στο ερώτημα α)), επίσης ΑΕ=ΓΜ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΓΜΕ (που δείξαμε στο ερώτημα α)).
Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ επομένως ΒΜ=ΓΜ (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε ΔΑ=ΑΕ.

13833.Στο διπλανό σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.

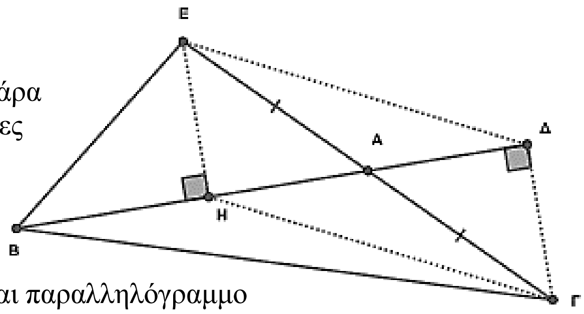


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ έχουν:
- ΑΓ=ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)
- $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΕΑΗ}$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $\widehat{ΑΕΗ} = \widehat{ΑΓΔ}$ άρα και ΑΗ=ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.



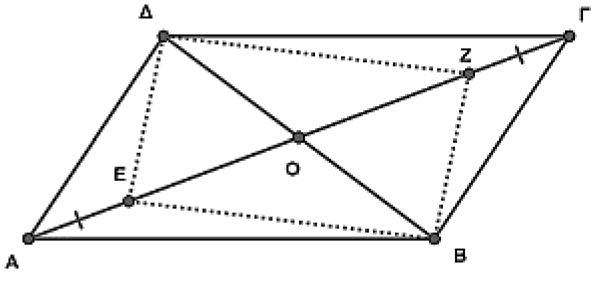
γ) Από υπόθεση έχουμε ότι ΒΑ διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα ΕΑ=ΑΓ και από το β) ερώτημα αποδείξαμε ότι ΑΗ=ΑΔ, άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.

13829.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ που έχουν:
- ΑΕ=ΓΖ (από υπόθεση)
- ΑΔ=ΒΓ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
- $\widehat{ΕΑΔ} = \widehat{ΖΓΒ}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

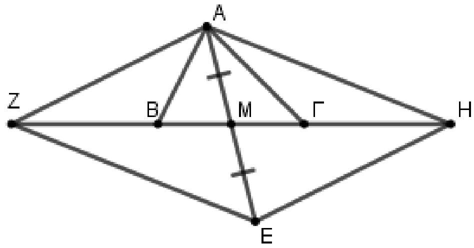
Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.



β) ΟΕ=ΟΑ-ΑΕ και ΟΖ=ΟΓ-ΖΓ. Όμως ΟΑ=ΟΓ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΕ=ΖΓ από υπόθεση. Άρα ΟΕ=ΟΖ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον ΒΟ=ΟΔ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται και το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

13834.Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



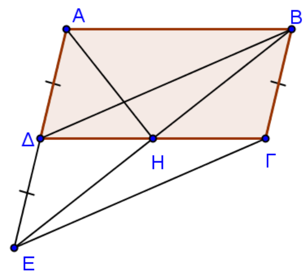
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ που έχουν:
- ΑΜ=ΜΕ (υπόθεση)
- ΜΖ=ΜΗ (άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΒ+ΒΖ και ΜΓ+ΓΗ)
- $\hat{AMZ} = \hat{EMH}$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από υπόθεση έχουμε ΑΜ=ΜΕ (1) και όπως χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη σύγκριση έχουμε ΜΖ=ΜΗ (2). Επομένως στο τετράπλευρο ΑΗΕΖ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

34386. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι
α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

Λύση



α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή $A\Delta = B\Gamma$.
Είναι $AE = A\Delta + \Delta E = 2A\Delta = 2B\Gamma = AB$, άρα το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.

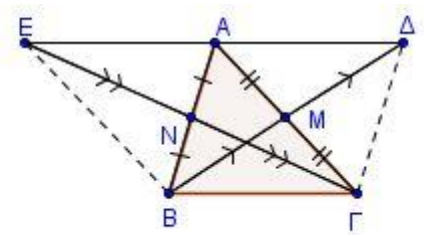
β) Επειδή τα σημεία Α,Δ,Ε είναι συνευθειακά και $B\Gamma \parallel A\Delta$, είναι και $B\Gamma \parallel \Delta E$. Όμως $B\Gamma = \Delta E$, άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του ΓΔ, ΒΕ διχοτομούνται στο Η. Δηλαδή το Η είναι μέσο του ΒΕ, οπότε η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

34388. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $NE = \Gamma N$.
α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.
β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Επειδή $AM = M\Gamma$ και $M\Delta = BM$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΔ, ΒΓ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες.
Επειδή $AN = NB$ και $NE = \Gamma N$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΕΒΓΑ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΕ, ΒΓ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες.

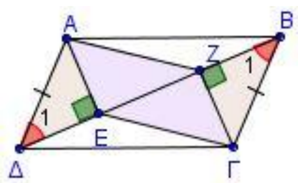


β) Οι ΑΕ και ΑΔ είναι παράλληλες στη ΒΓ, επομένως είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Όμως έχουν κοινό σημείο το Α, άρα ανήκουν στον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά.

34389. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

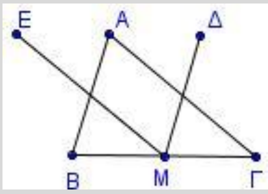
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
2) $\Delta_1 = B_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ
Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσας τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα.



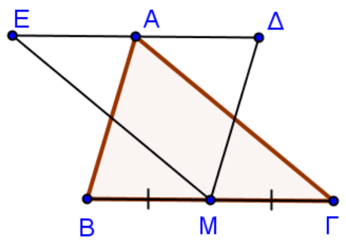
β) Είναι $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, άρα $AE \parallel \Gamma Z$. Όμως $AE = \Gamma Z$ γιατί τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα, άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

34391. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta A = AE$.
β) Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.
γ) $\Delta E = B\Gamma$.



Λύση

α) Επειδή τα τμήματα ΜΔ και ΒΑ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και τα τμήματα ΑΔ και ΒΜ είναι ίσα και παράλληλα.
Επειδή τα τμήματα ΜΕ και ΓΑ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και οι πλευρές ΑΕ και ΜΓ είναι ίσες και παράλληλες.
Επειδή $A\Delta = BM$ και $AE = M\Gamma = BM$ (Μ μέσο ΒΓ), είναι και $AE = A\Delta$.

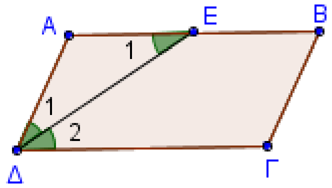


β) Επειδή $A\Delta \parallel BM$ και $AE \parallel BM$, είναι και $AE \parallel A\Delta$. Όμως τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ έχουν κοινό σημείο το Α, άρα τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο φορέα, οπότε τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά.

γ) Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = BM + M\Gamma = B\Gamma$

34394. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

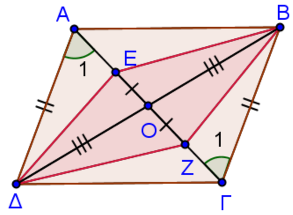
Λύση



α) Είναι $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ και $\Delta_2 = \Delta_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ, άρα $\Delta_1 = E_1$. Το τρίγωνο ΑΔΕ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.
β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ είναι $AE = A\Delta$, όμως $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AE + EB = 2AE \Leftrightarrow EB = AE$, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΒ.

34395. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E = BZ$
β) Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

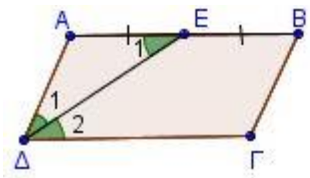


α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
2) $AE = Z\Gamma$ γιατί $OA = O\Gamma$ αφού οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και $OE = OZ$
3) $A_1 = \Gamma_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = BZ$.

β) Επειδή $OE = OZ$ και $OB = O\Delta$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

34423. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Λύση

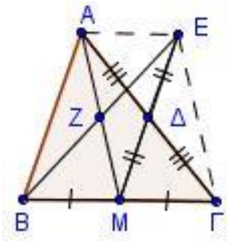


α) Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΒ, είναι:
$AE = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ έχει δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, είναι $\Delta_1 = E_1$ Όμως $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα $\Delta_1 = \Delta_2$, δηλαδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

34425. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

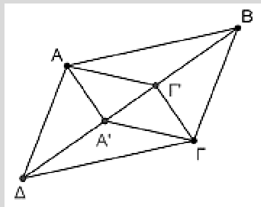
Λύση



α) Επειδή $ΜΔ = ΔΕ$ και $ΑΔ = ΔΓ$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

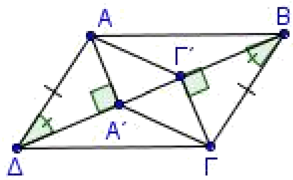
β) Επειδή το ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο οι πλευρές ΑΕ και ΜΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $ΒΜ = ΜΓ$ και τα σημεία Β,Μ,Γ είναι συνευθειακά, άρα και τα τμήματα ΑΕ και ΜΒ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΜΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΕ, ΒΜ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΜΕ, άρα διχοτομούνται, δηλαδή το Ζ είναι το κοινό τους μέσο. Επομένως η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

34783. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$
β) $ΑΑ' = ΓΓ'$
γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Είναι $ΑΑ' \perp ΒΔ$ και $ΓΓ' \perp ΒΔ$, άρα $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$.



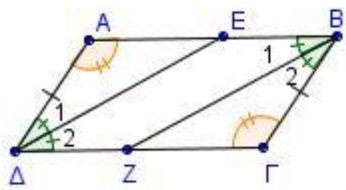
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑ΄Δ και ΓΓ΄Β έχουν:
1) $ΑΔ = ΒΓ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
2) $ΑΔΑ' = ΓΒΓ'$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΑ' = ΓΓ'$.

γ) Επειδή $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$ και $ΑΑ' = ΓΓ'$, το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

36089. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

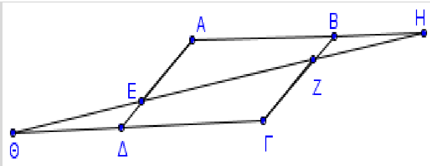


α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν:
1) $ΑΔ = ΒΓ$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
2) $Α = Γ$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
3) $Δ_1 = Β_2$ γιατί είναι μισά των γωνιών Β και Δ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα έχουν $\Delta E = BZ$(1) και $AE = \Gamma Z$.
Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, είναι και $AB - AE = \Gamma\Delta - \Gamma Z \Leftrightarrow BE = \Delta Z$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

36090. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$.
Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:



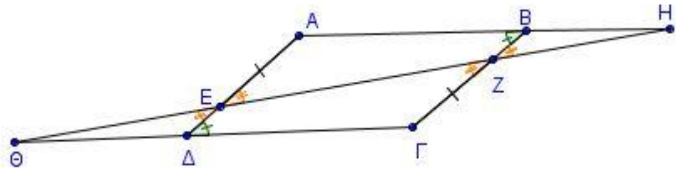
α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$

γ) $BH = \Theta\Delta$

Λύση

α) Είναι $B = \Delta$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου , $HBZ = 180^\circ - B = 180^\circ - \Delta = E\Delta\Theta$



β) Είναι $BZH = \Gamma Z E$(1) ως κατακορυφήν

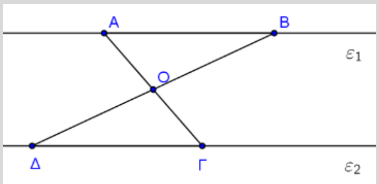
και (2) $\Delta E\Theta = AEZ$ ως κατακορυφήν .

Όμως $\Gamma ZE = AEZ$(3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΖ οπότε από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $BZH = \Delta E\Theta$.

γ) Τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ έχουν:
1) $E\Delta = BZ$, γιατί $A\Delta = B\Gamma$ και $AE = \Gamma Z$
2) $HBZ = E\Delta\Theta$ και
3) $BZH = \Delta E\Theta$

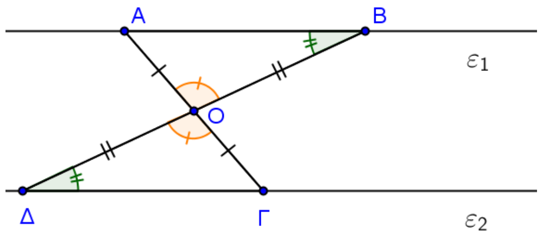
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BH = \Theta\Delta$.

36096. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία Α, Β στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

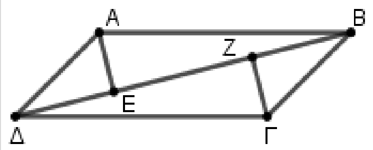


α) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ έχουν:
1) $BO = O\Delta$ γιατί το Ο είναι μέσο του ΒΔ
2) $AOB = \Gamma O\Delta$ ως κατακορυφήν και
3) $ABO = \Gamma\Delta O$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ΒΔ.

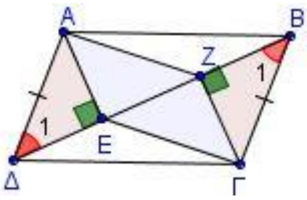
Με βάση το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AO = O\Gamma$, $AB = \Gamma\Delta$ και $OAB = O\Gamma\Delta$.

β) Επειδή $AO = O\Gamma$ και $BO = O\Delta$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

36105. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΒΓ$ φέρνουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΕ = ΓΖ$
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.



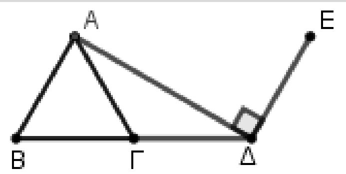
Λύση



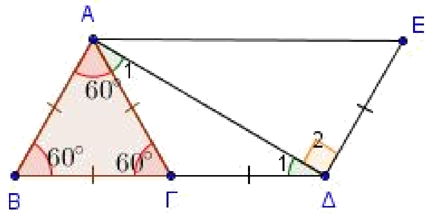
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:
1) $ΑΔ = ΒΓ$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
2) $Δ_1 = Β_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ
Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΕ = ΓΖ$.

β) Είναι $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΓΖ \perp ΒΔ$, άρα $ΑΕ \parallel ΓΖ$. Όμως $ΑΕ = ΓΖ$ από α) ερώτημα , άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

36115. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΒΓ$.(Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη ΒΔ).
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.



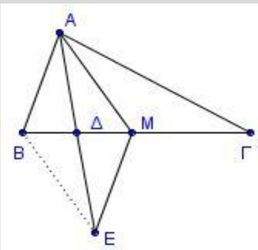
Λύση



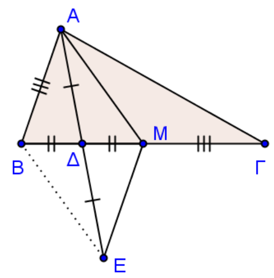
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι
$ΒΑΓ = Γ = Β = 60^\circ$. Τότε $Γ_{εξ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Επειδή $ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $Α_1 = Δ_1$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ έχουμε:
$Α_1 + Δ_1 + Γ_{εξ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2Δ_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$
$2Δ_1 = 60^\circ \Leftrightarrow Δ_1 = 30^\circ$, άρα και $Α_1 = 30^\circ$. Άρα : $ΒΑΔ = ΒΑΓ + Α_1 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.
Επομένως οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ είναι : $ΒΑΔ = 90^\circ, \hat{Β} = 60^\circ$ και $Δ_1 = 30^\circ$

β) Είναι $ΒΑΔ = 90^\circ$, άρα $ΒΑ \perp ΑΔ$. Όμως και $ΔΕ \perp ΑΔ$, άρα $ΑΒ \parallel ΔΕ$.
Είναι ακόμη $ΔΕ = ΒΓ = ΑΒ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

36164. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $ΑΔ = ΔΕ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΜΕ = ΜΓ$.



Λύση

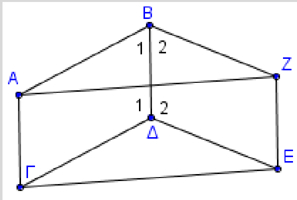


α) Επειδή $ΑΔ = ΔΕ$ και $ΒΔ = ΔΜ$ (αφού η ΑΔ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΜ) οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΕΜ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ΜΕ = ΑΒ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

$ΒΓ = 2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$, άρα $ΜΕ = ΜΓ$.

36327. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $Α\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Δ}Ε$



Λύση

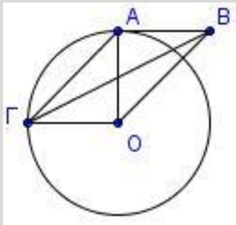
α) Επειδή το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες.
Επειδή το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του ΒΔ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες.
Άρα οι ΑΓ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες, οπότε και το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι γωνίες $Β_1, Δ_1$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $Β_1 + Δ_1 = 180^\circ \Leftrightarrow Δ_1 = 180^\circ - Β_1$

Οι γωνίες $Β_2, Δ_2$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΖ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $Β_2 + Δ_2 = 180^\circ \Leftrightarrow Δ_2 = 180^\circ - Β_2$.

Είναι $ΓΔΕ = 360^\circ - Δ_1 - Δ_2 = 360^\circ - (180^\circ - Β_1) - (180^\circ - Β_2) = Β_1 + Β_2 = ΑΒΖ$

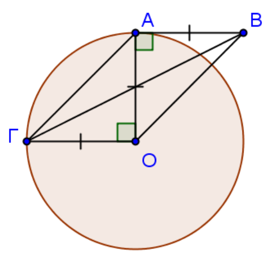
36348. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $ΑΒ = ΟΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.



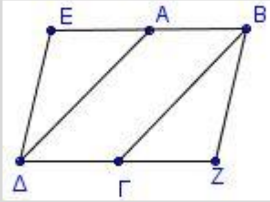
Λύση

α) Επειδή η ΟΑ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη ΑΒ, είναι $ΟΑ \perp ΑΒ$. Όμως $ΟΑ \perp ΟΓ$, άρα $ΑΒ \parallel ΟΓ$. Επειδή $ΑΒ = ΟΓ$ και $ΑΒ \parallel ΟΓ$, στο τετράπλευρο ΑΒΟΓ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΟ και ΒΓ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

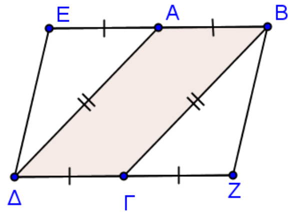
β) Επειδή $ΑΒ = ΟΑ = ρ$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $Β = ΒΟΑ = 45^\circ$. Είναι $ΑΓΟ = Β = 45^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.
Είναι $ΒΟΓ = ΒΟΑ + ΑΟΓ = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ και $ΓΑΒ = ΒΟΓ = 135^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.



36225. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση



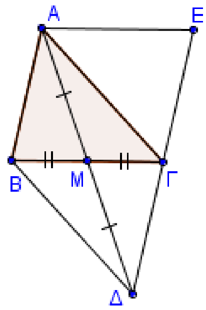
α) Τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΒΖΓ έχουν:
1) $ΑΕ = ΑΒ = ΓΔ = ΓΖ$ (τα ΑΒ, ΓΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
2) $ΑΔ = ΒΓ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
3) $\hat{ΒΓΖ} = \hat{ΕΑΔ}$ γιατί είναι παραπληρωματικές των γωνιών Α, Γ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή $ΒΖ = ΕΔ$ και $ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ = ΔΖ$, το τετράπλευρο ΕΒΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.

37015. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$.

Λύση



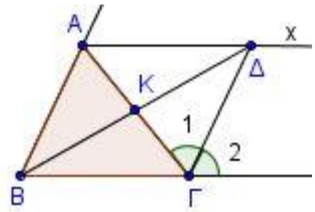
α) Επειδή $ΒΜ = ΜΓ$ και $ΜΔ = ΜΑ$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Άρα και οι ΑΒ και ΓΕ είναι παράλληλες. Επειδή και οι ΑΕ, ΒΓ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $ΑΕ = ΒΓ$,γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, ισχύει ότι: $ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΕ}{2}$.

Θέμα 4ο

1709. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας Α. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx//ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$.
γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

Λύση



α) Επειδή τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, δηλαδή η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ της ΑΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες.
Είναι $Γ_1 = ΒΑΓ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.
Όμως $Γ_{εξ} = 2Α \Leftrightarrow Γ_1 + Γ_2 = 2Α \Leftrightarrow Α + Γ_2 = 2Α \Leftrightarrow Γ_2 = Α$, δηλαδή $Γ_1 = Γ_2$, οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της $Γ_{εξ}$.

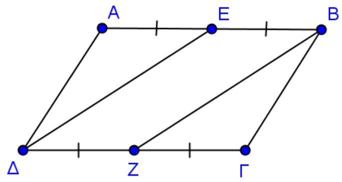
γ) Γνωρίζουμε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο μέσα και απέναντι γωνιών του, άρα $Γ_{εξ} = Α + Β$. Όμως $Γ_{εξ} = 2Α$, άρα $2Α = Α + Β \Leftrightarrow Α = Β$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

1730. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $ΑΒ > ΑΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$.
Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Ισχυρισμός 1
Είναι $ΔΖ = \frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΕΒ$ και $ΔΖ \parallel ΕΒ$ αφού $ΔΓ \parallel ΑΒ$,οπότε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2
Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι
$ΔΕΒ = ΒΖΔ \Leftrightarrow \cancel{180^\circ} - \widehat{ΑΕΔ} = \cancel{180^\circ} - \widehat{ΒΖΓ} \Leftrightarrow ΑΕΔ = ΒΖΓ$.



2ος τρόπος: $ΑΕΔ = ΒΖΓ$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες

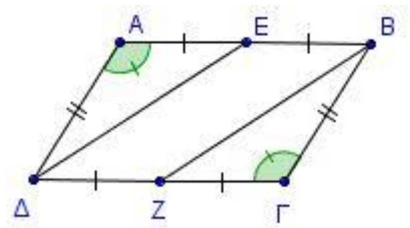
β) Ισχυρισμός 3
Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. Τότε $ΑΔΕ = ΕΔΖ$.
Όμως $ΑΕΔ = ΕΔΖ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ, άρα

$\mathrm{A\Delta E} = \mathrm{AE\Delta}$ και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Delta}$.

Είναι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = 2\mathrm{A\Delta}$,δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1731. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ > ΓΔ και η γωνία Α είναι αμβλεία,, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



α) ***Ισχυρισμός 1***

Είναι $\Delta\mathrm{Z} = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{EB}$ και $\Delta\mathrm{Z} \parallel \mathrm{EB}$ αφού $\Delta\Gamma \parallel \mathrm{AB}$,οπότε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν:

1) $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
2) $\mathrm{AE} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \mathrm{Z\Gamma}$
3) $\mathrm{A} = \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

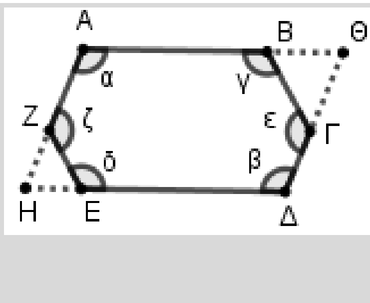
β) ***Ισχυρισμός 3***

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή. Τότε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = 2\mathrm{A\Delta}$

Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1746. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύον τα εξής:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta},\quad \hat{\gamma} = \hat{\delta} \text{ και } \hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}.$$



α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$.
β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:
i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

$\hat{\alpha} = \hat{\beta},\ \hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.(*)

α) Για τις γωνίες του εξαγώνου ισχύει ότι:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\varepsilon} + \hat{\zeta} = (6-2)180^\circ = 720^\circ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\varepsilon} = 720^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^\circ \quad (1)$$

β) i. Είναι $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}=360^\circ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \hat{\alpha}+\hat{\delta}+\hat{\zeta}=360^\circ$ (2)

Οι γωνίες $H\hat{Z}E, \hat{\zeta}$ και $H\hat{E}Z, \hat{\delta}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές.

Άρα $H\hat{Z}E+\hat{\zeta}=180^\circ$ και $H\hat{E}Z+\hat{\delta}=180^\circ$ (3)

Στο τρίγωνο ΗΖΕ ισχύει ότι: $\hat{H}+H\hat{Z}E+H\hat{E}Z=180^\circ \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{H}+180^\circ-\hat{\zeta}+\cancel{180^\circ}-\hat{\delta}=\cancel{180^\circ} \Leftrightarrow$

$\hat{H}=\hat{\delta}+\hat{\zeta}-180^\circ \overset{(2)}{=} 360^\circ-\hat{\alpha}-180^\circ=180^\circ-\hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{H}+\hat{A}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{H}+\hat{\alpha}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{H}+\hat{A}=180^\circ$

ii. Επειδή οι γωνίες Η και Α είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΘ, ΗΔ που τέμνονται από την ΑΗ και επίσης είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΘ, ΗΔ είναι παράλληλες.
Οι γωνίες $\Theta\hat{B}\Gamma, \hat{\gamma}$ και $\Theta\hat{\Gamma}B, \hat{\varepsilon}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma+\hat{\gamma}=180^\circ$ και $\Theta\hat{\Gamma}B+\hat{\varepsilon}=180^\circ$ (4). Στο τρίγωνο ΘΒΓ είναι:

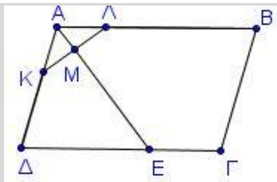
$\hat{\Theta}+\Theta\hat{B}\Gamma+\Theta\hat{\Gamma}B=180^\circ \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \hat{\Theta}+180^\circ-\hat{\gamma}+\cancel{180^\circ}-\hat{\varepsilon}=\cancel{180^\circ} \Leftrightarrow$

$\hat{\Theta}=\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}-180^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \Theta=360^\circ-\hat{\alpha}-180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \hat{\Theta}=180^\circ-\hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Theta}+\hat{A}=180^\circ$.

Επειδή οι γωνίες Α,Θ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΗ,ΘΔ που τέμνονται από την ΑΘ και είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΗ και ΘΔ είναι παράλληλες.
Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB>A\Delta$. Θεωρούμε σημεία Κ,Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK=A\Lambda$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta=\Delta E$. **β)** $B\Gamma+\Gamma E=AB$. **γ)** $\hat{B}=2\cdot A\hat{\Lambda}K$



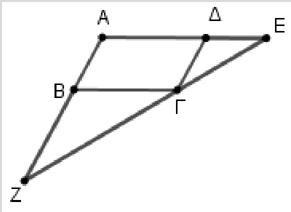
Λύση

α) Επειδή $AK=A\Lambda$, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ΚΛ, άρα η ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, δηλαδή $KAM=MA\Lambda$.

Όμως $MA\Lambda=AE\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ, άρα $KAM=AE\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, άρα $A\Delta=\Delta E$.

β) Είναι $\Delta E=A\Delta=B\Gamma$, οπότε $B\Gamma+\Gamma E=\Delta E+\Gamma E=\Delta\Gamma=AB$

γ) Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΛ έχουμε:
$A+AK\Lambda+A\Lambda K=180^\circ \Leftrightarrow A+2\cdot A\Lambda K=180^\circ \Leftrightarrow 2\cdot A\Lambda K=180^\circ-A$ (1). Οι γωνίες Α και Β είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $A+B=180^\circ \Leftrightarrow B=180^\circ-A$ (2).
Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $B=2\cdot A\Lambda K$.



1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$

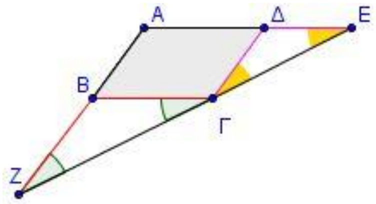
ii. Τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

« Έχουμε: $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ). Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα : $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Λύση



α) i. Επειδή $BZ = B\Gamma$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι Β ισοσκελές οπότε $B\Gamma Z = BZE$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΖ έχουμε:

$B_{\varepsilon\xi} + B\Gamma Z + BZE = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\cancel{180^\circ} - \widehat{B} + 2\widehat{B\Gamma Z} = \cancel{180^\circ} \Leftrightarrow B\Gamma Z = \frac{B}{2}$ (1).

Επειδή $\Delta E = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\Delta\Gamma E = \Delta E\Gamma$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΓΔΕ, έχουμε:

$\Delta\Gamma E + \Delta_{\varepsilon\xi} + \Delta E\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\Gamma E + \cancel{180^\circ} - \widehat{\Delta} = \cancel{180^\circ} \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Gamma E} = \frac{\Delta}{2}$ (2).

Όμως $B = \Delta$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B\Gamma Z = \Delta\Gamma E$.

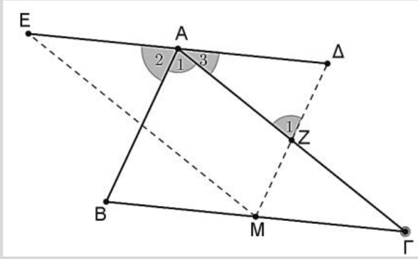
ii. Σκέψη: Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά θα δείξουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν $\left(Z\Gamma E\right)$ είναι ευθεία γωνία.

Επειδή οι γωνίες Γ και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ,ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, είναι παραπληρωματικές.

Είναι $B\hat{\Gamma}Z + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{\Gamma}E = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$, άρα τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά

β) Ο μαθητής χρησιμοποίησε ως δεδομένο ότι τα Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά και το χρησιμοποίησε για να δείξει ότι οι γωνίες ΒΓΖ και ΔΕΓ είναι ίσες.

1810.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α .Να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του.
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ). Όμως

$\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ,Α,Ε συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

Λύση

α) $M\Delta // = BA$ οπότε το τετράπλευρο ΒΑΔΜ είναι παραλληλόγραμμο και ΑΔ// =ΒΜ.
Όμοια ΜΕ//= ΓΑ οπότε το τετράπλευρο ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμο και ΑΕ// =ΜΓ.
Από το Α έχουμε ΑΕ // ΒΓ και ΑΔ// ΒΓ
άρα τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά.

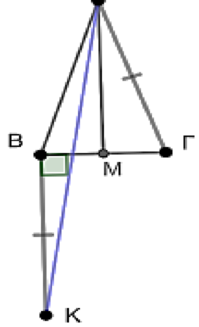
β) Αν Π η περίμετρος του τριγώνου ΜΕΔ και Π_1 η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ τότε

$\Pi = ME + M\Delta + \Delta E = A\Gamma + AB + EA + A\Delta = \ = A\Gamma + AB + M\Gamma + BM = A\Gamma + AB + B\Gamma = \Pi_1$

γ) Το λάθος υπάρχει στον συλλογισμό $A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ γιατί χρησιμοποιεί την ΔΑΕ σαν ευθεία χωρίς να γνωρίζει αν τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά.

13742.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ.
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ.
γ) Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}A = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος προς τη βάση του ΒΓ, οπότε το ΑΜ είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας Α. Δηλαδή ΑΜ ⊥ ΒΓ και επιπλέον οι γωνίες ΒΑΜ και ΓΑΜ είναι ίσες. Από την κατασκευή ΚΒ ⊥ ΒΓ και επειδή ΑΜ ⊥ ΒΓ, τότε ΑΜ//ΚΒ , ως κάθετες στη ΒΓ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι ΒΚ = ΑΓ και ξέρουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες, οπότε ΑΒ = ΒΚ.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι ΑΒ = ΒΚ, άρα το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $BAK = BKA$.
Επιπλέον έχουμε ότι ΑΜ//ΒΚ, οπότε οι γωνίες KAM και BKA θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των ΑΜ//ΒΚ που τέμνονται από την ΑΚ.

Άρα ισχύει ότι $BAK = BKA = KAM$ (1) οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABK οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή $BAK + KBA + BKA = 180^\circ$. Επιπλέον $KBA = AB\Gamma + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε:
$2BKA + B + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2BKA + B = 90^\circ$.
Όμως οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε

$$2BKA = 90^\circ - \Gamma \Leftrightarrow BKA = 45^\circ - \frac{\Gamma}{2}.$$

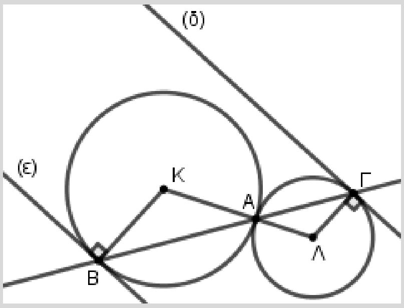
δ) Το τετράπλευρο ABKM έχει τις δυο απέναντι πλευρές του AM και BK παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι AM και BK θα ήταν και ίσες. Αν AM = BK τότε θα ισχύει ότι AM = AB. Όμως τα τμήματα AM και AB είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι AM < AB. Συνεπώς έχουμε ότι AM < KB και το τετράπλευρο ABKM δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

13845. Οι κύκλοι (K,R), (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$.

β) (ε) // (δ).

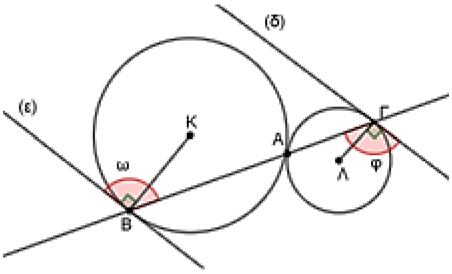
γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με KB = KA, ως ακτίνες του κύκλου (K,R). Άρα $KBA = KAB$ (1).
Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Λ,ρ). Άρα $\Lambda A\Gamma = \Lambda\Gamma A$ (2).
Οι γωνίες KAB και ΛΑΓ είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $KBA = \Lambda\Gamma A$.

β) Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα.



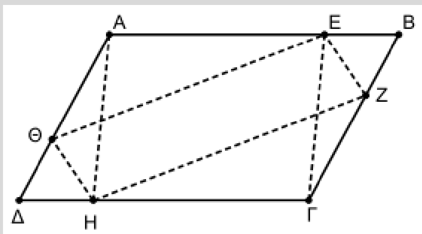
Για τις γωνίες ω, φ έχουμε $\hat{\omega} = 90^\circ + KBA$ και $\hat{\varphi} = 90^\circ + \Lambda\Gamma A$.
Από το ερώτημα (α) οι γωνίες KBA και ΛΓΑ είναι ίσες, οπότε και οι γωνίες ω, φ είναι ίσες. Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, συνεπώς (ε) // (δ).

37108. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι και $AE \parallel \Gamma H$. Όμως είναι και $AE = \Gamma H$, άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΔΗΘ έχουν:

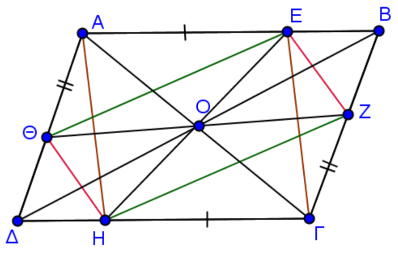
1) $BZ = \Delta\Theta$
2) $\Delta H = BE$ γιατί (ΔΗ=ΔΓ-ΗΓ=ΑΒ-ΑΕ=ΒΕ) και
3) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\Theta H = EZ\,(1)$.

Τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΓΗΖ έχουν:

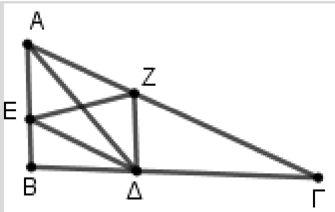
1) $AE = \Gamma H$
2) $A\Theta = \Gamma Z$ $\left(A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z\right)$ και
3) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Theta E = HZ\,(2)$. Από τις (1),(2) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.

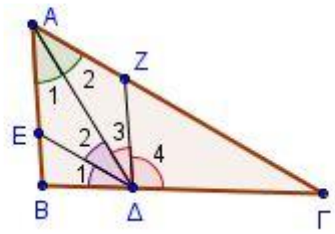


γ) Τα ΕΗ, ΖΘ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ, οπότε διχοτομούνται σε σημείο Ο. Τα ΑΓ, ΕΗ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΗΓΕ, οπότε διχοτομούνται.
Όμως το μέσο της ΕΗ είναι το Ο, άρα το Ο είναι μέσο και της ΑΓ. Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα διχοτομούνται. Όμως η ΑΓ έχει μέσο το Ο, άρα και η ΒΔ έχει μέσο το Ο. Τελικά τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ έχουν κοινό μέσο το Ο.

37117. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα.
β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.
γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.



Λύση



α) Επειδή $A\Delta = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = \omega$. Η γωνία ΒΔΑ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

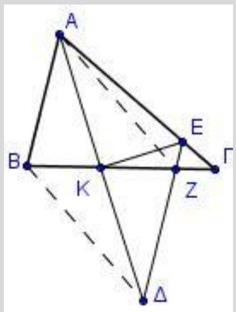
$B\hat{\Delta}A = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 2\omega$. Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \dfrac{B\hat{\Delta}A}{2} = \dfrac{2\omega}{2} = \omega$.

Οι γωνίες $E\hat{\Delta}A$ και $\hat{A}_2$ είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι ίσες με ω, άρα τα τμήματα ΔΕ και ΑΓ είναι παράλληλα.

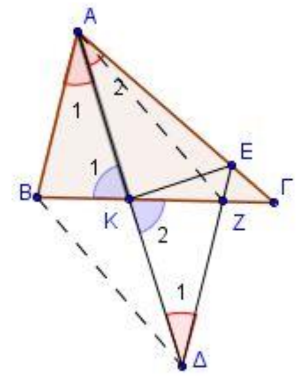
β) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_2 = \omega$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ.

γ) Επειδή $\Delta Z \parallel AB$ και $\Delta E \parallel AZ$, στο τετράπλευρο ΑΕΔΖ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Τα ΑΔ και ΕΖ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

37131. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα.
δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση



α) Είναι $A_1 = \Delta_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ και $A_1 = A_2$ λόγω της διχοτόμησης, άρα είναι και $A_2 = \Delta_1$ οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

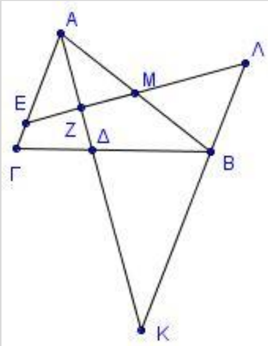
β) Η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΔ, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ έχουν:
1) $AK = K\Delta$
2) $K_1 = K_2$ ως κατακορυφήν
3) $A_1 = \Delta_1$

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα, έχουν και $BK = KZ$, όμως είναι και $AK = K\Delta$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΖΔΒ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

37160. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.
β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

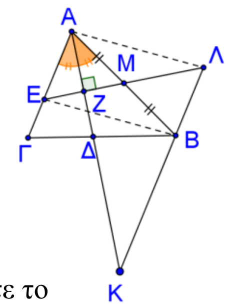


Λύση

α) Έστω Ζ το σημείο τομής των ΑΔ, ΜΕ. Η ΑΖ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΕΜ, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $AEM = AME$.

Είναι $AEM = M\Lambda B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΛΚ που τέμνονται από την ΕΛ και $AME = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν, άρα $BM\Lambda = M\Lambda B$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι $\Gamma A\Delta = K$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΑΚ και $\Gamma A\Delta = \Delta AB$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, άρα $\Delta AB = K$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.



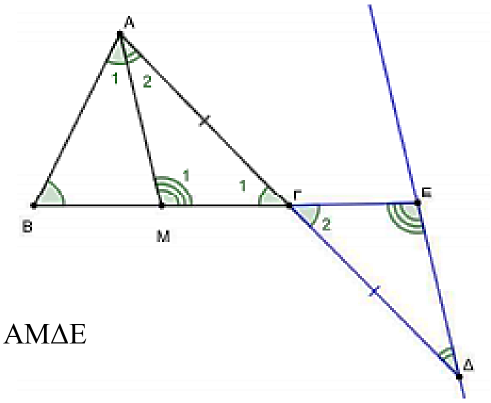
β) Τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ έχουν:
1) $AM = MB$
2) $AME = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν και
3) $AEM = M\Lambda B$

άρα από το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = M\Lambda$. Στο τετράπλευρο ΑΛΒΕ τα ΕΛ,ΑΒ είναι διαγώνιές του που διχοτομούνται στο Μ, οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 3ο

11897. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΓ = ΓΕ.
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $\hat{B}+B\hat{A}M=\Gamma\hat{E}\Delta$

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΓΕΔ έχουν:
- ΑΓ = ΓΔ (υπόθεση)
- $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ ως κατακορυφήν
- $\hat{A}_2=\hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΓΕΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΓ = ΓΕ.

β) Επειδή ΜΓ = ΓΕ και ΑΓ = ΓΔ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΜΔΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

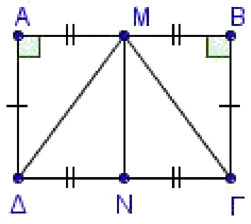
γ) Στο τρίγωνο ΒΑΜ η γωνία M_1 είναι εξωτερική, οπότε $\hat{M}_1=\hat{B}+B\hat{A}M$. Όμως $\hat{M}_1=\Gamma\hat{E}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ, ΕΔ που τέμνονται από την ΜΕ, άρα $\hat{B}+B\hat{A}M=\Gamma\hat{E}\Delta$.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

2ο Θέμα

34781. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $M\Delta = M\Gamma$
β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ έχουν:

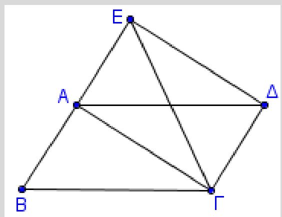
1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές ορθογωνίου

2) $AM = MB$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

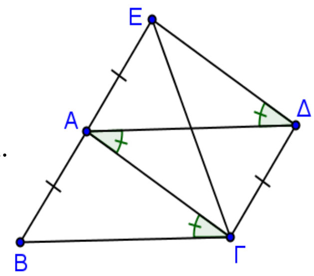
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = M\Gamma$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΔ το ΜΝ είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, δηλαδή το ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ΓΔ.

36175. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.
β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.
γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$



Λύση

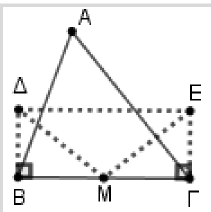


α) Είναι $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $AE = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΓΔΕ, άρα είναι και $AB = AE$, δηλαδή το Α είναι μέσο του ΒΕ.

β) Είναι $B\Gamma = A\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Όμως $A\Delta = \Gamma E$ γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα $B\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

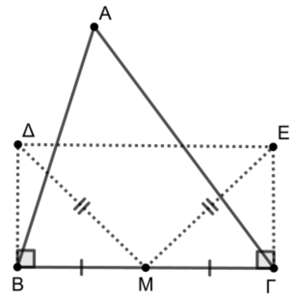
γ) Είναι $B\Gamma A = \Gamma A\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ και $A\Delta E = \Gamma A\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ, άρα είναι και $B\Gamma A = A\Delta E$.

36339. Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΔ = ΜΕ.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ έχουν:



1) $ΜΒ = ΜΓ$ επειδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
2) $ΜΔ = ΜΕ$, άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.
Επομένως $ΒΔ = ΓΕ$

β) Επειδή $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ είναι $ΒΔ \parallel ΓΕ$. Επιπλέον $ΒΔ = ΓΕ$ γιατί τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, οπότε στο τετράπλευρο ΒΔΕΓ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{ΔΒΓ} = 90^\circ$, το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο.

36353. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες.
β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

Λύση

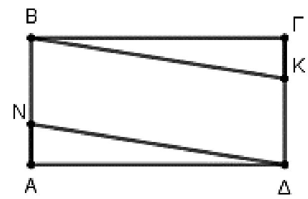
α) Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν:
1) $ΟΑ = ΟΒ = ρ$
2) $ΟΓ = ΟΔ = ρ$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου και
3) $\hat{ΑΟΓ} = \hat{ΒΟΔ}$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΓ = ΒΔ$.

β) Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ$, οι διαγώνιες ΑΒ, ΓΔ του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

37008. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



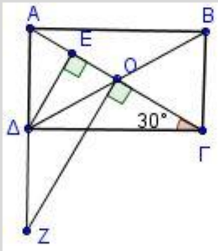
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:
- ΑΝ = ΓΚ (υπόθεση)
- ΑΔ = ΒΓ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου

Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

β) Είναι ΑΒ = ΓΔ και ΑΝ = ΓΚ, οπότε και $ΑΒ - ΑΝ = ΓΔ - ΓΚ \Leftrightarrow ΒΝ = ΚΔ$
Ακόμη επειδή τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα, έχουν και ΔΝ = ΒΚ.
Το τετράπλευρο ΝΒΚΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι

4ο Θέμα

1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta A\Gamma + \Delta\Gamma A = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma = 60^\circ$

Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες, άρα και $OA = O\Delta$ ως μισά των ίσων διαγωνίων. Το τρίγωνο ΟΑΔ έχει $OA = O\Delta$ και $\Delta A\Gamma = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο. Το ΔΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διχοτόμος του, δηλαδή $A\Delta E = E\Delta O = 30^\circ$.

Είναι $O\Delta\Gamma = 90^\circ - A\Delta O = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επειδή $A\Delta E = E\Delta O = O\Delta\Gamma = 30^\circ$, η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:

1) $OA = B\Gamma$ γιατί $OA = A\Delta$ από το ισόπλευρο ΟΑΔ και $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές στο ορθογώνιο

2) $A\Gamma B = 90^\circ - A\Gamma\Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \Delta A\Gamma$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

1733. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

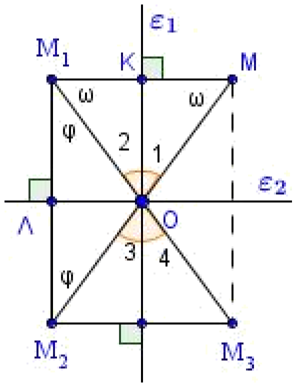
i. $OM = OM_1$.

ii. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



α) i. Επειδή το M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1, η ε_1 είναι μεσοκάθετος του MM_1. Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του MM_1, οπότε ισαπέχει από τα Μ και M_1, δηλαδή $OM = OM_1$.

ii. Επειδή το τρίγωνο OMM_1 είναι ισοσκελές με βάση τη MM_1 είναι $OMM_1 = OM_1M = \omega$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OMM_1, έχουμε:

$MOM_1 + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow MOM_1 = 180^\circ - 2\omega$ (1)

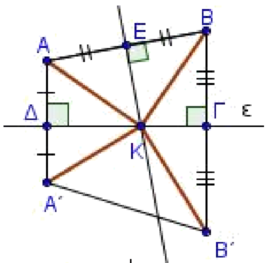
Επειδή το M_2 είναι το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, η ε_2 είναι μεσοκάθετος του M_2M_1. Το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές με βάση τη M_1M_2, άρα $O\hat{M}_1M_2 = O\hat{M}_2M_1 = \varphi$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OM_2M_1, έχουμε:
$M_2\hat{O}M_1 + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow M_2\hat{O}M_1 = 180^\circ - 2\varphi$ (1)
Επειδή $MM_1 \perp \varepsilon_1$, $M_1M_2 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, είναι και $M_1M_2 \perp MM_1$, άρα $M\hat{M}_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$
$M\hat{O}M_2 = M\hat{O}M_1 + M_2\hat{O}M_1 = 180^\circ - 2\omega + 180^\circ - 2\varphi = = 360^\circ - 2(\omega+\varphi) = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$ άρα τα σημεία Μ,Ο και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Είναι $M\hat{M}_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $M_2M_3 \perp \varepsilon_1$, άρα $M_2M_3 \parallel MM_1$.
M_1,O, M_3 συνευθειακά (απόδειξη όμοια με α)ii) . Τα τρίγωνα OMM_1 και OM_2M_3 έχουν $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$ και $M\hat{O}M_1 = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = M_3\hat{O}M_2$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_2M_3 = MM_1$. Το τετράπλευρο $MM_1M_2M_3$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $M\hat{M}_1M_2 = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

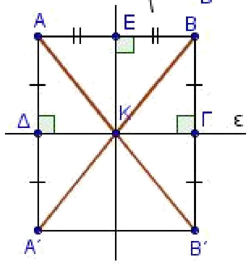
1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ΄//ΒΒ΄.
β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.
γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



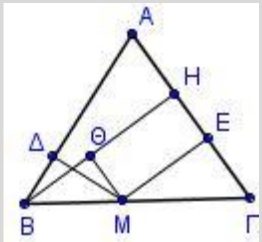
α) Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' \parallel BB'$.

β) Επειδή το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή $KA = KB$ (1).
Επειδή το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την (ε), η ΚΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, άρα $KA = KA'$ (2). Επειδή το Β΄ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την (ε), η ΚΓ είναι μεσοκάθετος του ΒΒ΄, άρα $KB = KB'$ (3). Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $KA' = KB'$, δηλαδή το Κ ισαπέχει από τα Α΄ και Β΄ , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.



γ) Όταν το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο, τότε το ΑΔΚΕ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB \perp AA'$, $\varepsilon \perp AA'$, άρα $AB \parallel \varepsilon$.

1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο.
β) $ΒΘ = ΔΜ$.
γ) $ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$.



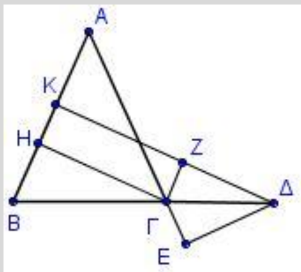
Λύση

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΒΘΜ έχουν:
1) $ΔΒΜ = ΘΜΒ$, γιατί $ΔΒΜ = Γ$ (στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και $ΘΜΒ = Γ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΘ, ΓΑ που τέμνονται από την ΒΓ.
2) τη πλευρά ΜΒ κοινή.
Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΘ = ΔΜ$,

γ) $ΜΔ + ΜΕ \underset{ΜΕ=ΘΗ}{\overset{ΒΘ=ΔΜ}{=}} ΒΘ + ΘΗ = ΒΗ$ ΜΕ=ΘΗ (Απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΜΕΗΘ)

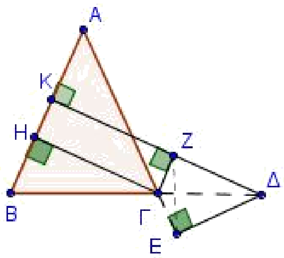
1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.
γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.
δ) $ΔΚ - ΔΕ = ΗΓ$



Λύση

α) Επειδή $ΓΖ \perp ΔΚ$ και $ΒΑ \perp ΔΚ$, οι ευθείες ΓΖ και ΑΒ είναι παράλληλες. Οι γωνίες ΖΓΔ και Β είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΖ που τέμνονται από την ΒΔ.

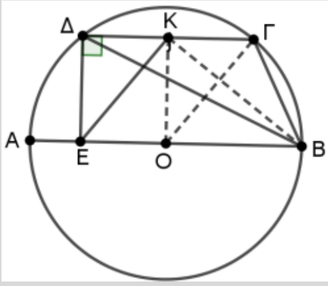
β) Είναι $ΔΓΕ = ΑΓΒ$ ως κατακορυφήν , $ΑΓΒ = Β$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου και $Β = ΖΓΔ$, άρα και $ΔΓΕ = ΖΓΔ$, οπότε η ΓΔ διχοτομεί τη γωνία ΖΓΕ.



γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΓΔ και ΔΓΕ έχουν:
1) τη πλευρά ΔΓ κοινή και
2) $ΔΓΕ = ΖΓΔ$,
δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΔΖ = ΔΕ$. Άρα το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

δ) Το τετράπλευρο ΚΗΓΖ έχει 3 ορθές οπότε είναι ορθογώνιο. Οι ΚΖ,ΗΓ είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου και είναι ίσες.
Είναι $ΔΚ - ΔΕ = ΔΖ + ΖΚ - ΔΖ = ΖΚ = ΗΓ$

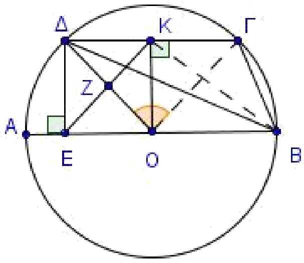
1879. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ.
Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και Κ το μέσο της.
Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$
γ) $KE < KB$



Λύση

α) Επειδή $\Delta E \perp \Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$ είναι και $\Delta E \perp AB$.

Επειδή το ΟΚ είναι απόστημα της χορδής ΑΒ, είναι $OK \perp \Gamma\Delta$. Το τετράπλευρο ΔΕΟΚ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta K = EO$. Όμως $\Delta K = K\Gamma$, άρα $K\Gamma = \parallel EO$, οπότε το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.



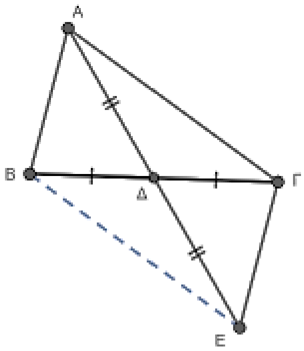
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ έχουν:
1) τη πλευρά ΔΚ κοινή και
2) $\Delta E = OK$,
άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta EK = \Delta OK$.
Στο τρίγωνο ΔΟΓ η ΟΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΟΚ είναι και διχοτόμος. Άρα $\Delta O\Gamma = 2\Delta OK = 2\Delta EK \Leftrightarrow \Delta EK = \dfrac{\Delta O\Gamma}{2}$

γ) Είναι $KE = O\Delta$ (διαγώνιοι ορθογωνίου ΚΕΟΔ), $O\Delta = OB$ (Ακτίνες)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $OB < BK$, άρα $KE < KB$.

13746. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.
α) Να αποδείξετε ότι :
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.
ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.
β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση



α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ έχουν:
- ΑΔ = ΔΕ, από υπόθεση
- ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ μέσο της ΒΓ
- $A\Delta B = E\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα.
Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΓΕ (1).

ii. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε :

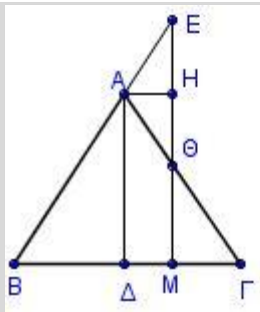
ΑΕ < ΑΓ + ΑΒ. Όμως ΑΕ = 2ΑΔ, οπότε έχουμε ότι $2\text{ΑΔ} < \text{ΑΒ} + \text{ΑΓ} \Leftrightarrow \text{ΑΔ} < \dfrac{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}{2}$

Δηλαδή η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι 2ΑΔ = ΒΓ ή ΑΕ = ΒΓ. Δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιές του είναι ίσες.
Επιπλέον έχουμε ότι ΑΔ = ΔΕ από την κατασκευή και ΒΔ = ΔΓ, αφού Δ μέσο της ΒΓ.
Δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{Α} = 90^\circ$, αφού το ΑΒΕΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\text{ΑΒΓ}\left(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}\right)$ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα.
Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 90^\circ$.
β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.
γ) $\text{ΜΘ} + \text{ΜΕ} = 2\text{ΑΔ}$.

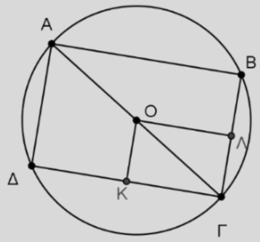
Λύση

α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα $\text{ΔΑΗ} = 90^\circ$.

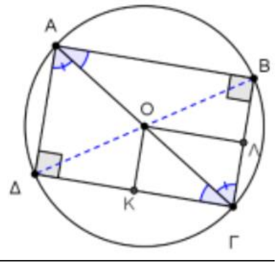
β) Το ΑΔ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, η ΑΗ είναι κάθετη στην ΑΔ , άρα η ΑΗ θα διχοτομεί την γωνία ΘΑΕ που είναι εφεξής και παραπληρωματική της Α.
Στο τρίγωνο ΑΘΗ το ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\text{ΑΔ} = \text{ΜΗ}$ γιατί είναι απέναντι πλευρές ορθογωνίου και $\text{ΘΗ} = \text{ΗΕ}$ αφού η ΑΗ εκτός από ύψος και διχοτόμος είναι και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΘΗ.
Είναι $\text{ΜΘ} + \text{ΜΕ} = \text{ΜΘ} + \text{ΜΘ} + \text{ΘΕ} = = 2\text{ΜΘ} + 2\text{ΘΗ} = 2\left(\text{ΜΘ} + \text{ΘΗ}\right) = 2\text{ΜΗ} = 2\text{ΑΔ}$

34326. Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές ΑΔ, ΒΓ και χορδές ΔΓ, ΑΒ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.
β) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
γ) η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου,
δ) το τετράπλευρο ΟΚΓΛ είναι ορθογώνιο.



Λύση



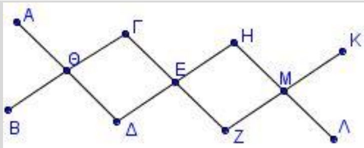
α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια και έχουν:
1) ΑΓ κοινή πλευρά και 2) $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$ (υπόθεση)
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.
Οπότε $\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Δ} = \text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Β}$ άρα οι ΔΓ και ΑΒ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

β) Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}B$, άρα οι ΑΔ, ΒΓ παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Έχει και τουλάχιστον μία ορθή γωνία άρα τελικά είναι ορθογώνιο.

γ) Οι ΑΓ και ΒΔ διάμετροι του ορθογωνίου οπότε θα διχοτομούνται.
Η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου και το Ο κέντρο του κύκλου άρα μέσο της ΑΓ. Επομένως το Ο είναι και μέσο της ΒΔ και η ΒΔ διάμετρος.

δ) Είναι $O\Delta = O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου) άρα το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές. Επειδή το Κ μέσο της ΔΓ, τότε το ΟΚ είναι διάμεσος άρα και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΔΓ. Επομένως $O\hat{K}\Gamma = 90^o$.
Ομοίως το τρίγωνο ΓΟΒ ισοσκελές και Λ μέσο της ΒΓ άρα $O\hat{\Lambda}\Gamma = 90^o$.
Είναι επίσης $B\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$ άρα το τετράπλευρο ΟΚΛΓ έχει τρεις ορθές γωνίες, επομένως είναι ορθογώνιο.

37083. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

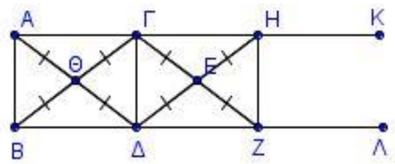


α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
β) Τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά.
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Επειδή $E\Gamma = E\Delta = EH = EZ$, στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $\Theta A = \Theta B = \Theta\Gamma = \Theta\Delta$, στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $B\Delta\Gamma = 90^\circ$.



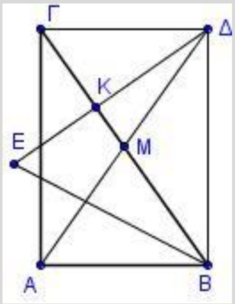
Επειδή το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο, είναι $\Gamma\Delta Z = 90^\circ$. Είναι $B\Delta Z = B\Delta\Gamma + \Gamma\Delta Z = 180^\circ$, οπότε τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο ΘΓΔΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα είναι ρόμβος και $\Gamma\Theta\Delta = \Gamma E\Delta$.
Τα τρίγωνα ΒΘΔ και ΕΔΖ έχουν

- $B\Theta\Delta = \Delta EZ$ σαν εφεξής και παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\Gamma\hat{\Theta}\Delta$, $\Gamma E\Delta$
- $B\Theta = \Delta E$
- $\Theta\Delta = EZ$

Επομένως τα τρίγωνα ΒΘΔ και ΕΔΖ είναι ίσα και $B\Delta = \Delta Z$.
Επειδή το ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα. Όμως τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά. Άρα τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

37102. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.



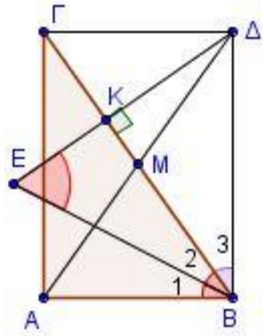
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

β) $K\hat{E}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$

γ) $\Delta E = B\Delta$.

Λύση



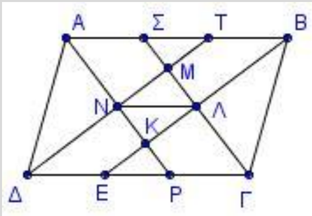
α) Επειδή $AM = M\Delta$ και $BM = M\Gamma$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΔΓ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον έχει $A = 90^\circ$, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΕΚΒ έχουμε:

$$KEB + B_2 = 90^\circ \Leftrightarrow KEB + \frac{B}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$$

γ) Είναι $\Delta BE = 90^\circ - B_1 = 90^\circ - \dfrac{B}{2} = KEB$, δηλαδή το τρίγωνο ΔΒΕ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΒΕ και έχει $\Delta E = B\Delta$

37167. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ,Ε στην ΔΓ και Σ, Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ,Λ,Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



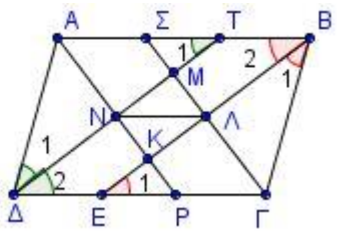
α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

γ) $\Lambda N \parallel AB$

δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ έχουν:

1) $B_1 = \Delta_1$ γιατί είναι μισά των απέναντι γωνιών Β και Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

2) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου κοινή και

3) $A = \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta T = BE$ (1) και $AT = E\Gamma$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $BT = \Delta E$, είναι και $BT = \Delta E$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

β) Όμοια ΑΣΓΡ παραλληλόγραμμο οπότε ΑΡ// ΣΓ και $NK \parallel M\Lambda$ Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $MN \parallel K\Lambda$, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $\Delta_2 = T_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και $\Delta_2 = \Delta_1$ γιατί η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ, άρα είναι και $\Delta_1 = T_1$. Το τρίγωνο ΑΔΤ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ. Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $N = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή, είναι ορθογώνιο.

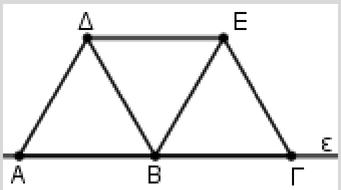
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΕΓ είναι ίσα και $ΑΔ = ΑΤ$ αφού το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές, είναι $ΑΔ = ΑΤ = ΓΕ = ΓΒ$. Η ΓΛ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΕ, οπότε είναι και διάμεσός του, άρα $ΒΛ = \frac{ΒΕ}{2}$. Όμως $ΤΝ = \frac{ΤΔ}{2}$ και $ΤΔ = ΒΕ$ αφού το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΒΛ = ΤΝ$. Επειδή είναι και $ΒΛ \parallel ΤΝ$ αφού $ΤΔ \parallel ΒΕ$, το τετράπλευρο ΒΤΝΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε $ΛΝ \parallel ΑΒ$.

δ) Είναι $ΛΝ = ΒΤ = ΑΒ - ΑΤ \underset{\overset{\Delta}{ΑΔΤ} \text{ ισοσκελές}}{\overset{ΑΤ=ΑΔ}{=}} ΑΒ - ΑΔ$

ΡΟΜΒΟΣ

Θέμα 2ο

13767. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Δ\hat{Β}Ε$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

Λύση

α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60ο καθεμιά. Η γωνία ΑΒΓ είναι ευθεία, οπότε: $ΑΒΔ + ΔΒΕ + ΕΒΓ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 60^\circ + ΔΒΕ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΔΒΕ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ : ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ (1)
Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει: ΒΓ = ΒΕ = ΓΕ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΔ = ΒΕ, αφού ΑΒ = ΒΓ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες.

Συνεπώς, $ΒΔΕ = ΒΕΔ$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει: $ΒΔΕ + ΒΕΔ + ΔΒΕ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ΒΔΕ + ΒΔΕ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΔΕ = 120^\circ \Leftrightarrow ΒΔΕ = 60^\circ = ΒΕΔ$.

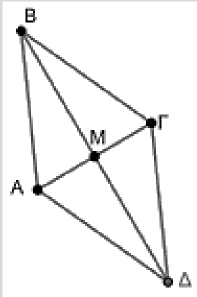
Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60ο καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

ή

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει: ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ (1)
Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει: ΒΓ = ΒΕ = ΓΕ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΔ = ΒΕ, αφού ΑΒ = ΒΓ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με τη γωνία του $ΔΒΕ = 60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ : ΔΕ = ΒΕ = ΒΔ (4)
Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού ΑΔ = ΑΒ = ΒΕ = ΔΕ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

13832. Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ.
Επίσης $\hat{AMB} = \hat{\Gamma MB}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.
ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



Λύση

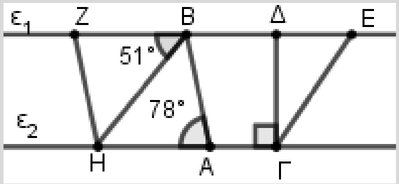
α) i. Οι γωνίες AMB και ΓMB είναι παραπληρωματικές. Όμως σύμφωνα με την υπόθεση είναι και ίσες.

Άρα η κάθε μια είναι ορθή γωνία, δηλαδή $AMB = \Gamma MB = 90^\circ$.
Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

ii. Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον από το ερώτημα αi) οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

β) Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος επομένως θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα κάθε πλευρά του κήπου χρειάζεται 30:4=7,5 μέτρα φράχτη. Συνεπώς, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε 30 – 7,5 = 22, 5 μέτρα φράχτη.

13842. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος.
Επίσης δίνονται οι γωνίες $B\hat{A}H = 70^\circ$, $Z\hat{B}H = 51^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56^o, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ.



Λύση

α) Εφόσον το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος η διαγώνιός του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του ABZ. Επομένως $ABH = ZBH = 51^\circ$.

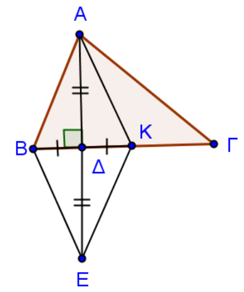
β) Η γωνία $ABZ = ABH + ZBH = 102^\circ$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $ABZ = 102^\circ$ και $BAH = 78^\circ$, των ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ΑΒ είναι παραπληρωματικές. Επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την ε_2 από την υπόθεση (εφόσον η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την ε_1 που είναι παράλληλη της ε_2. Άρα η γωνία ΓΔΕ είναι ορθή και το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
Άρα οι οξείες γωνίες του Γ και Ε είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\Gamma = 90^\circ - E = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$

34498. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

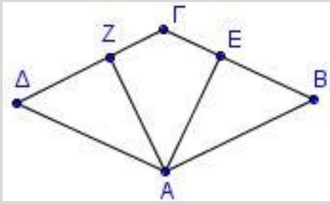
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΚ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή $ΔΕ = ΑΔ$, $ΒΔ = ΔΚ$ και $ΑΕ \perp ΒΚ$, στο τετράπλευρο ΑΒΕΚ οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

34504. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $ΑΖ = ΑΕ$.
β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $ΑΖ = ΑΕ$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



Λύση

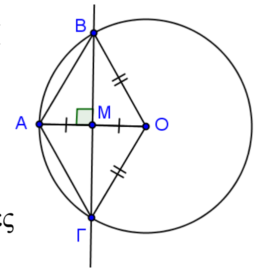
α) Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$ πλευρές του ρόμβου και
2) $\hat{Δ} = \hat{Β}$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΖ = ΑΕ$.

β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΑΖ = ΑΕ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
1) $ΑΖ = ΑΕ$ και
2) $\hat{Δ} = \hat{Β}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΑΒ$.
Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

34513. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο.
β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

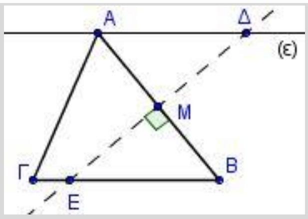
Λύση

α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$. Στο τρίγωνο ΒΑΟ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, οπότε $ΑΒ = ΟΒ = ρ$. Στο τρίγωνο ΒΑΟ και οι τρείς πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο.



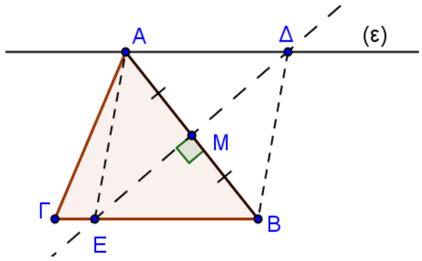
β) Στο τρίγωνο ΓΑΟ η ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, οπότε $ΑΓ = ΟΓ = ρ$. Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.

36107. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.
β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.



Λύση

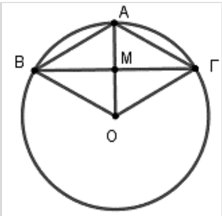
α) Επειδή τα σημεία Ε, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β, δηλαδή $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.



β)Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:
1) $ΑΜ = ΜΒ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΑΒ και
2) $\widehat{ΜΑΔ} = \widehat{ΜΒΕ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ.
Τα τρίγωνα έχουν μια κάθετή τους πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίσα, άρα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΕΒ είναι ίσα, έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$.
Στο τετράπλευρο ΑΔΒΕ οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

36349.Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.

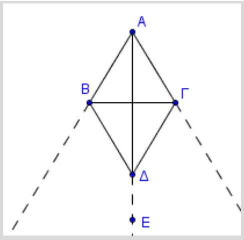


Λύση

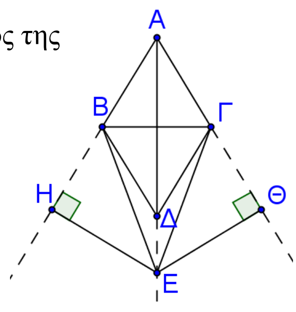
α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ$. Στο τρίγωνο ΒΑΟ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, οπότε $ΑΒ = ΟΒ = ρ$. Στο τρίγωνο ΑΓΟ η ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ, δηλαδή ΑΓ=ΟΓ. Επειδή το τετράπλευρο ΑΓΟΒ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΒΑΟ και οι τρείς πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο, οπότε $\widehat{ΟΒΑ} = 60^\circ$. Επειδή οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, είναι και $\widehat{ΟΓΑ} = \widehat{ΟΒΑ} = 60^\circ$
Επειδή οι γωνίες ΟΒΑ και ΒΟΓ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΟΓ που τέμνονται από την ΟΒ, είναι $\widehat{ΟΒΑ} + \widehat{ΒΟΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$ και $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$.

36351. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).
β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.



Λύση



α) Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ.($ΗΕ = ΗΘ$)

β) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ. Επειδή το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, ισαπέχει από τα Β και Γ.($ΕΒ = ΕΓ$)

Θέμα 4ο

1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.
α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

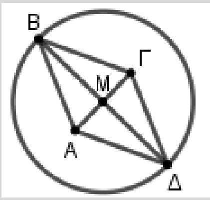
Λύση

α) **Π1:** Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και έστω ΑΕ η απόσταση των παραλλήλων ΑΔ,ΒΓ και ΑΖ η απόσταση των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΖ έχουν:
1) $AB = A\Delta$ πλευρές του ρόμβου
2) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.
Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = AZ$.

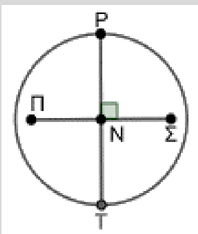
Π2: Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και οι αποστάσεις ΑΕ, ΑΖ είναι ίσες.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΖ έχουν:
1) $AE = AZ$
2) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.
Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = A\Delta$.
Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

13857.α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

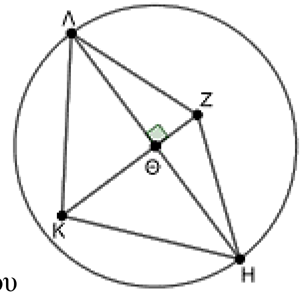


γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν. Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.

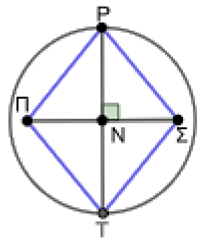
Λύση

α) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση, άρα ισχύει ΑΜ = ΜΓ. Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, γιατί από την υπόθεση το Μ είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Ακόμα οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες, γιατί η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση. Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής. Η Πρόταση 2 είναι ψευδής. Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.
Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος.
Πράγματι ισχύει ΚΘ>ΘΖ, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, γιατί αν ήταν θα έπρεπε ΚΘ = ΘΖ (καθώς οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται). Επομένως δεν είναι και ρόμβος.



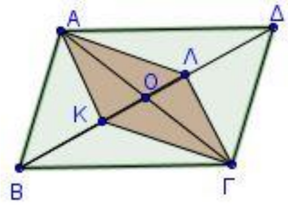
γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ. Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και ΠΝ = ΝΣ, από την υπόθεση. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου. Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος.
Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
Δηλαδή ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.



37109. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $ΒΚ = ΚΛ = ΛΔ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

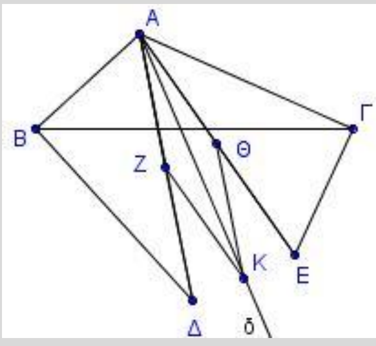
α) Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επειδή οι διαγώνιες διχοτομούνται, είναι $ΒΟ = ΟΔ$. Όμως $ΒΚ = ΛΔ$, άρα και
$ΒΟ - ΒΚ = ΟΔ - ΛΔ \Leftrightarrow ΚΟ = ΟΛ$.
Επειδή $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΚΟ = ΟΛ$, το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.



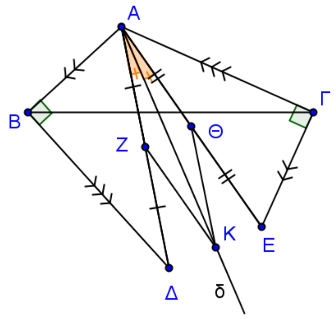
β) Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ θα είναι κάθετες. Τότε όμως και στο παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ οι διαγώνιες του θα είναι κάθετες και θα είναι ρόμβος.

γ) Για να είναι το ΑΚΓΛ ορθογώνιο πρέπει οι διαγώνιές του να είναι ίσες, δηλαδή $ΚΛ = ΑΓ$. Όμως $ΚΛ = \frac{1}{3}ΒΔ$, άρα $ΑΓ = \frac{1}{3}ΒΔ \Leftrightarrow ΒΔ = 3ΑΓ$.

37141. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $\hat{Α} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $ΒΔ = ΑΓ$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΓΕ = ΑΒ$.
Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $Δ\hat{Α}Ε$.
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$.
β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.
γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $ΚΖ = ΑΖ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.



Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $\Gamma E = AB$ και
2) $B\Delta = A\Gamma$,
δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα και ισχύει ότι $A\Delta = AE$.

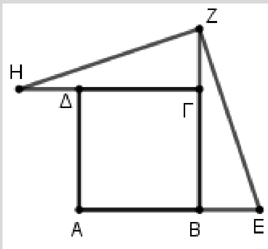
β) Αρκεί να δείξουμε ότι $KZ = K\Theta$.
Τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΘΚ έχουν:
1) $AZ = A\Theta$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΑΕ
2) τη πλευρά ΑΚ κοινή και
3) $ZAK = KA\Theta$ λόγω της διχοτόμησης
Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $KZ = K\Theta$.

γ) Αν $KZ = AZ$, τότε επειδή $KZ = K\Theta$ και $AZ = A\Theta$, το τετράπλευρο ΑΖΚΘ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Θέμα 2ο

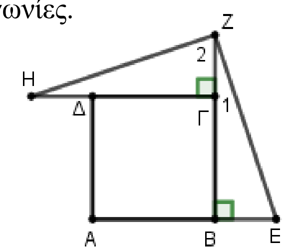
13536.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ.
α) Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΖΗ.
β) Να αποδείξετε ότι $E\hat{Z}H = 90^\circ$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΓΗ και ΒΖΕ έχουν:
- ΒΕ = ΓΖ υπόθεση
- ΒΖ = ΓΗ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ (πλευρές τετραγώνου) και ΓΖ, ΔΗ (δεδομένο) αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι ΖΕ = ΖΗ, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.

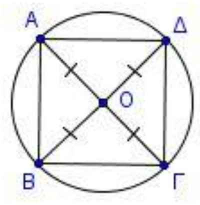


β) Επειδή τα τρίγωνα ΖΓΗ και ΒΖΕ είναι ίσα έχουν και $H = Z_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΒΕ.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΖΗΓ έχουμε:

$$H + Z_2 + 90^\circ = 180^\circ \overset{H=Z_1}{\Leftrightarrow} Z_1 + Z_2 = 90^\circ \Leftrightarrow EZH = 90^\circ$$

14883. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

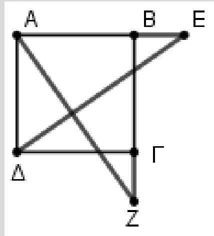
Λύση



α) Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες $(ΑΓ = ΒΔ = 2ρ)$ άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

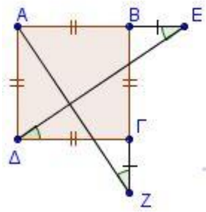
β) Γνωρίζουμε ότι ένα ορθογώνιο είναι τετράγωνο, όταν είναι και ρόμβος γι' αυτό πρέπει οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ να είναι και κάθετες.

36165. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.



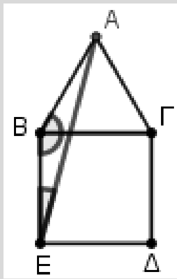
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$ πλευρές του τετραγώνου και
2) $ΑΕ = ΒΖ$, γιατί $ΑΒ = ΒΓ$ και $ΒΕ = ΓΖ$, άρα τα τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.



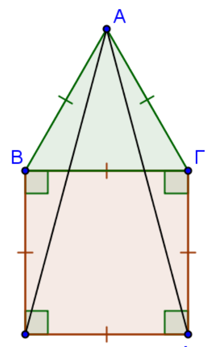
β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΒ είναι ίσα έχουν και $ΑΕΔ = ΑΖΒ$. Όμως $ΑΕΔ = ΕΔΓ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ άρα και $ΕΔΓ = ΑΖΒ$.

36173. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες:
i. $Α\hat{Β}Ε$
ii. $Β\hat{Ε}Α$
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60°, άρα $Α = ΑΒΓ = ΑΓΒ = 60^\circ$.
Επειδή το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο, οι γωνίες του είναι ορθές, άρα
$ΑΒΕ = ΑΒΓ + ΓΒΕ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$



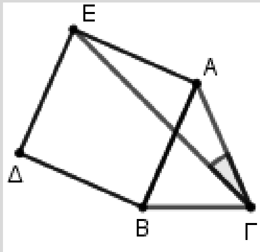
ii. Επειδή $ΑΒ = ΒΓ = ΒΕ$, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ, οπότε $ΒΕΑ = ΒΑΕ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΑ έχουμε:
$ΒΕΑ + ΒΑΕ + ΑΒΕ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΕΑ + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΕΑ = 30^\circ \Leftrightarrow ΒΕΑ = 15^\circ$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
1) $ΑΒ = ΑΓ$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου
2) $ΒΕ = ΓΔ$ πλευρές του τετραγώνου

3) $\mathrm{A\Gamma\Delta} = \mathrm{A\Gamma B} + \mathrm{B\Gamma\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \mathrm{ABE}$

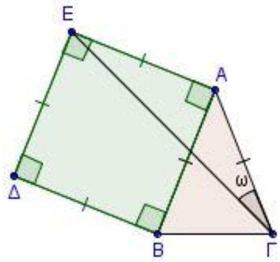
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Delta}$, άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

36174. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.
Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.
β) $2\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $\mathrm{AB} = \mathrm{AE}$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου και $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, άρα $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ έχει δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.

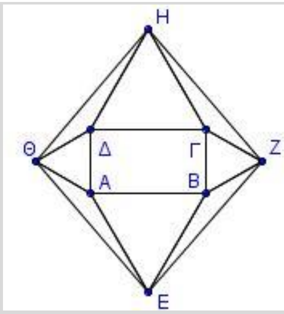


β) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\mathrm{AE\Gamma} = \mathrm{E\Gamma A}$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΕΓ έχουμε: $\mathrm{AE\Gamma} + \mathrm{E\Gamma A} + \mathrm{EA\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$2\mathrm{E\Gamma A} + 90^\circ + \mathrm{BA\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^\circ - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

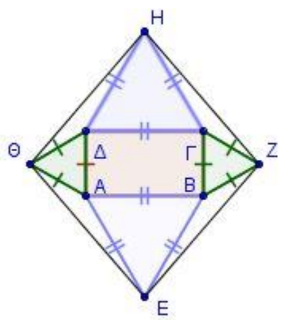
4ο Θέμα

1734. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



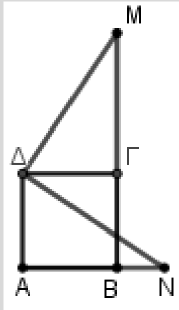
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:
1) $\mathrm{H\Delta} = \mathrm{AE} = \mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma H}$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ
2) $\mathrm{\Theta\Delta} = \mathrm{\Theta A} = \mathrm{BZ} = \mathrm{\Gamma Z}$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ
3) $\mathrm{H\Delta\Theta} = \mathrm{\Theta AE} = \mathrm{EBZ} = \mathrm{Z\Gamma H} = 360^\circ - 90^\circ - 2\cdot 60^\circ = 150^\circ$
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{H\Theta} = \mathrm{\Theta E} = \mathrm{EZ} = \mathrm{ZH}$.
Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει όλες του τις πλευρές ίσες και είναι ρόμβος.



β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ είναι ισοσκελή και ίσα. Τότε
$\mathrm{H\Theta\Delta} = \mathrm{\Theta H\Delta} = \mathrm{\Gamma HZ} = \mathrm{HZ\Gamma} = \mathrm{BZE} = \mathrm{ZEB} = \mathrm{AE\Theta} = \mathrm{E\Theta A} = \mathrm{\Theta EA} = \omega$ και από το άθροισμα γωνιών σε καθένα από τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ, έχουμε: $150^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 15^\circ$.
Τότε $\mathrm{H\Theta E} = \mathrm{\Theta EZ} = \mathrm{EZH} = \mathrm{ZH\Theta} = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, δηλαδή το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο και ρόμβος, άρα είναι τετράγωνο.

1750. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta N = \Delta M$
β) $\Delta N \perp \Delta M$

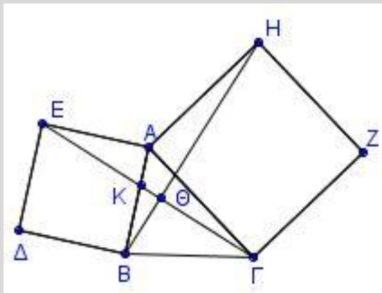


Λύση

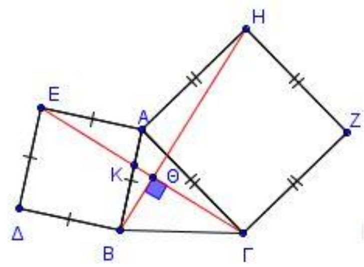
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ έχουν:
1) $\Delta\Gamma = A\Delta$ πλευρές του τετραγώνου και
2) $\Gamma M = AN$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta N = \Delta M$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ είναι ίσα, οι γωνίες ΜΔΓ και ΑΔΝ είναι ίσες.
Είναι $M\Delta N = M\Delta\Gamma + \Gamma\Delta N = A\Delta N + \Gamma\Delta N = A\Delta\Gamma = 90^\circ$, άρα $\Delta N \perp \Delta M$

1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$
β) $E\Gamma = BH$
γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ.



Λύση



α) Επειδή $EAB = HA\Gamma = 90^\circ$ είναι και

$EAH + BA\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow EAH = 180^\circ - BA\Gamma$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $BA\Gamma + AB\Gamma + A\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow$

$AB\Gamma + A\Gamma B = 180^\circ - BA\Gamma$ (2)

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι: $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$.

β) Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΗΑΒ έχουν:
1) $AH = A\Gamma$ πλευρές τετραγώνου,
2) $AE = AB$ πλευρές τετραγώνου και
3) $EA\Gamma = HAB = 90^\circ + BA\Gamma$

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $E\Gamma = BH$.

γ) Έστω Θ το σημείο τομής των ΕΓ,ΒΗ και Κ το σημείο τομής των ΕΓ,ΑΒ. Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΗΑΒ είναι ίσα, ισχύει ότι: $ABH = \Gamma EA$. Στο τρίγωνο ΑΕΚ είναι $\Gamma EA + EKA = 90^\circ$, όμως $EKA = BK\Gamma$ ως κατακορυφήν, οπότε $ABH + BK\Gamma = 90^\circ$.

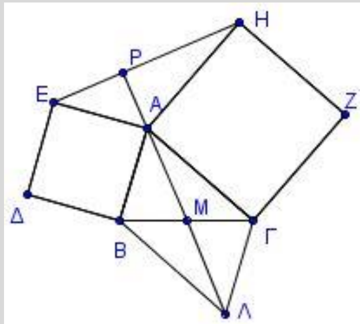
Στο τρίγωνο ΒΚΘ είναι $B\Theta K + ABH + BK\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow B\Theta K + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\Theta K = 90^\circ$, άρα $E\Gamma \perp BH$.

1795. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$.

β) $A\hat{\Gamma}\Lambda = E\hat{A}H$.

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.



Λύση

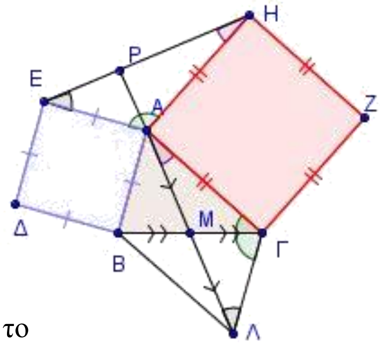
α) Στο τετράπλευρο ΑΒΛΓ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο και $\Gamma\Lambda = AB$. Όμως $AE = AB$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου, άρα $\Gamma\Lambda = AE$.

β) Επειδή $EAB = HA\Gamma = 90^\circ$, ισχύει ότι

$EAH + BA\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow EAH = 180^\circ - BA\Gamma$ (1).

Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΛΓ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες $BA\Gamma$ και $A\Gamma\Lambda$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Είναι $BA\Gamma + A\Gamma\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow A\Gamma\Lambda = 180^\circ - BA\Gamma$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $EAH = A\Gamma\Lambda$.



γ) Τα τρίγωνα ΕΑΗ και ΑΓΛ έχουν:

1) $A\Gamma = AH$ πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ
2) $AE = \Gamma\Lambda$ από α) ερώτημα
3) $EAH = A\Gamma\Lambda$ από β) ερώτημα

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $PHA = \Lambda A\Gamma$. Στο τρίγωνο ΡΑΗ είναι:

$PHA + PAH = MA\Gamma + PAH = 180^\circ - HA\Gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει ότι και $A\hat{P}H = 90^\circ$

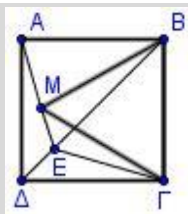
Άρα η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.

1814. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}E = 15^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

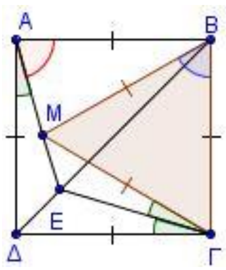


Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $MB\Gamma = 60^\circ$. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Τότε $B\Gamma = BM = M\Gamma = AM = \alpha$,και το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές. Είναι $ABM + MB\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow ABM = 30^\circ$ Στο τρίγωνο ΑΒΜ ισχύει ότι:

$MAB + AMB + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2MAB = 150^\circ \Leftrightarrow MAB = 75^\circ$.

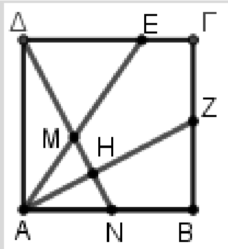
Τότε $\Delta AE = 90^\circ - MAB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$



β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:
1) τη πλευρά ΔΕ κοινή
2) $A\Delta=\Delta\Gamma=\alpha$
3) $A\Delta E=\Delta E\Gamma=45^\circ$ γιατί η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.
Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

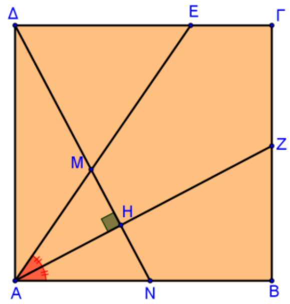
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ είναι ίσα ισχύει ότι $\Delta\Gamma E=\Delta AE=15^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $B\Gamma M=60^\circ$.
Τότε $E\Gamma M=\Delta\Gamma B-B\Gamma M-\Delta\Gamma E=90^\circ-60^\circ-15^\circ=15^\circ=\Delta\Gamma E$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

1825. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.
β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ.
γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ



Λύση

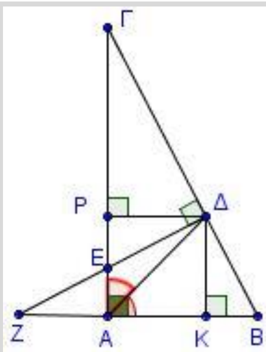
α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ. Έχουν:
i) ΑΔ=ΑΒ (πλευρές τετραγώνου)
ii) $A\hat{\Delta}N=Z\hat{A}B$ (Οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)
Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, επομένως είναι ίσα.



β) Στο τρίγωνο ΑΜΝ η ΑΗ είναι διχοτόμος και ύψος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα ΑΜ=ΑΝ (1). Στο τρίγωνο ΔΕΜ είναι $E\hat{\Delta}M=A\hat{N}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από τη ΔΝ και
$\Delta\hat{M}E=A\hat{M}N$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επειδή όμως $A\hat{M}N=A\hat{N}M$ (ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ) θα είναι ίσες και οι
γωνίες $E\hat{\Delta}M, E\hat{M}\Delta$. Επομένως το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές και ΔΕ=ΕΜ (2)

γ) $AE=AM+ME\overset{(1),(2)}{=}AN+E\Delta\overset{\overset{\Delta}{A\hat{\Delta}N}=\overset{\Delta}{Z\hat{A}B}}{=}BZ+E\Delta$

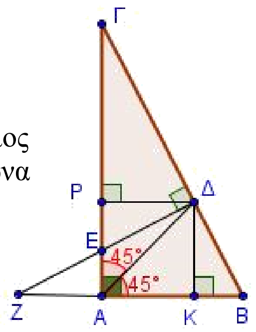
1894. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ.
Έστω Κ και Ρ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\hat{B}=\Delta\hat{E}\Gamma$
ii. $\Delta E=\Delta B$
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ.



Λύση

α) i. Επειδή $AB \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp \Delta E$, οι γωνίες

B και $\Delta E \Gamma$ είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και είναι ίσες.



ii. Το τετράπλευρο ΑΚΔΡ έχει τρείς ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επιπλέον η διαγώνιος του ΑΔ διχοτομεί τη γωνία Α, οπότε το ΑΚΔΡ είναι τετράγωνο. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΡΕ και ΔΚΒ έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $B = \Delta E \Gamma$,

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = \Delta B$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΡΓ και ΔΚΖ έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $\Gamma = Z$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta\Gamma = \Delta Z$. Το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45°. Επομένως $\Delta \Gamma Z = 45^\circ$.

13744. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.

ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

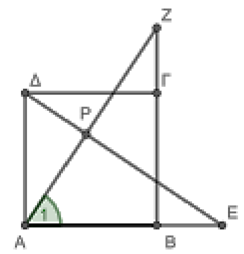
β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ.

Λύση

α) i. ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του τετραγώνου, ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε ΑΕ=ΒΖ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΕ = ΒΖ, από τη σχέση (1)

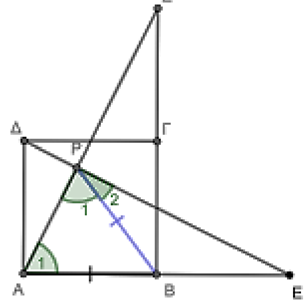


Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $AE\Delta$ και BZA είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών του είναι 90^o, δηλαδή:

$A_1 + BZA = 90^\circ$, αλλά $BZA = AE\Delta$, από το α)i. ερώτημα, οπότε $A_1 + AE\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 + AEP = 90^\circ$ (όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ). Στο τρίγωνο ΑΕΡ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o, οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o. Δηλαδή $APE = 90^\circ$, έτσι τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

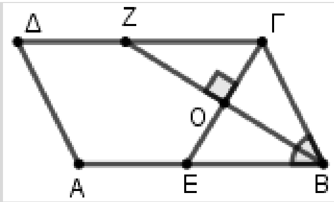
β) Από την υπόθεση ΡΒ = ΑΒ, άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $A_1 = P_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του.



Από το προηγούμενο ερώτημα $A_1 + AEP = 90^\circ$, ως άθροισμα των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $P_1 + AEP = 90^\circ$ (1).

Επιπλέον ισχύει $P_1 + P_2 = 90^\circ$ (2) επειδή $APE = 90^\circ$ από το α)ii.

Από τις (1) και (2) έχουμε $ΑΕΡ = Ρ_2$, ή $ΒΕΡ = Ρ_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΡΒ. Όμως ΡΒ = ΑΒ, από υπόθεση, οπότε ΒΕ = ΑΒ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε ΒΕ = ΑΒ.



13850.Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος
δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Β ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

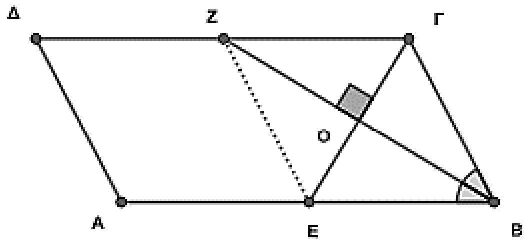
Λύση

α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β και ΒΟ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

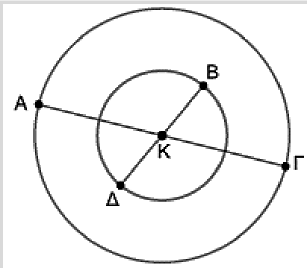
β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:
- ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)
- $ΖΓΟ = ΒΕΟ$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $ΖΓΟ$ και $ΒΕΟ$ και ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ).
Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι κάθετες από υπόθεση (ΒΖ ⊥ ΓΕ) είναι ρόμβος.



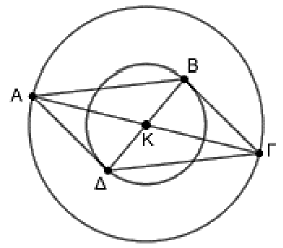
δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $Β = 90^\circ$.



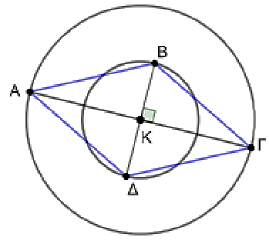
13848.Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.
α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:
i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.
ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

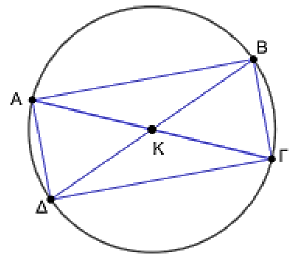
α) i. Ισχύει ότι ΒΚ = ΚΔ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ).
Ομοίως ΑΚ = ΚΓ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ.
Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους. Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».



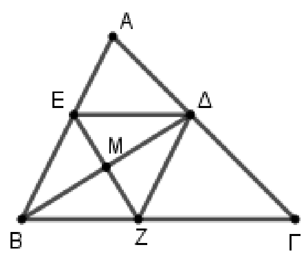
β) Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε ΑΓ = ΒΔ. Συνεπώς οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β). Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής καθώς το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.



13841.Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ.
β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.
δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ΔΕ//ΒΓ άρα $\text{ΔΒΖ} = \text{ΕΔΒ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, άρα $\text{ΔΒΖ} = \text{ΔΒΕ}$. Συνεπώς $\text{ΕΔΒ} = \text{ΔΒΕ}$ ως ίσες με την ΔΒΖ, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ=ΕΔ.



β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ τα οποία έχουν:
- ΒΜ=ΜΔ (υπόθεση)
- $\text{ΔΒΖ} = \text{ΕΔΒ}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ)
- $\text{ΒΜΖ} = \text{ΔΜΕ}$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα ΒΜΖ, ΔΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και ΒΖ=ΔΕ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες ΒΜΖ και ΔΜΕ.
Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του ΒΖ και ΔΕ παράλληλες και ίσες άρα και ΒΕ//ΖΔ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΕ=ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.
2ος τρόπος
Η διαγώνιος ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ οπότε είναι ρόμβος .

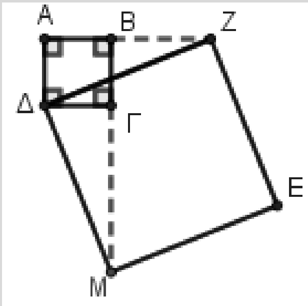
δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\hat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία Β είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

34336.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα και οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ και $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M}$ είναι ίσες.

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ είναι παραπληρωματικές.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουν:

1) ΑΔ= ΓΔ πλευρές του τετραγώνου

2) ΑΖ = ΓΜ υπόθεση

Επειδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, είναι ίσα, οπότε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M}$.

β) Είναι $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M} + \mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^\circ$.

Το παραλληλόγραμμο ΜΔΖΕ έχει μία γωνία ορθή και είναι ορθογώνιο. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουν και ΔΖ=ΔΜ, οπότε το ορθογώνιο ΜΔΖΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και είναι τετράγωνο.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουν και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{M}}\Delta$.

Είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} + \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} + \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = = \Gamma\hat{\mathrm{M}}\Delta + \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} + 90^\circ = \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Delta + 90^\circ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ είναι παραπληρωματικές.

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

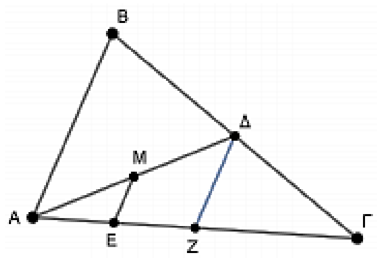
Θέμα 2ο

12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

β) το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ.

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, εφόσον από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΑΒ, αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς. Επομένως το Ζ είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ.

β) Λόγω του (α) ερωτήματος είναι $AZ = \frac{A\Gamma}{2}$.

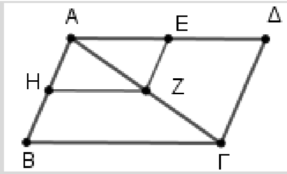
Στο τρίγωνο ΑΔΖ, το Μ είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η ΜΕ // ΔΖ εφόσον και οι δύο είναι παράλληλες στην ΑΒ.

Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα $AE = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.

13532.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι παράλληλο στη ΓΔ και ίσο με το μισό της, δηλαδή ΖΗ//ΓΔ (1) και $ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως ΑΒ = ΓΔ, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $ZH = \frac{AB}{2}$.

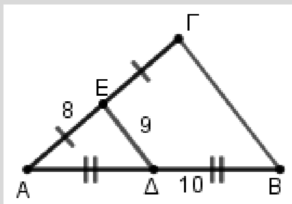
β) Αφού το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, θα είναι $AE = \frac{AB}{2}$.Όμως από το ερώτημα α) είναι $ZH = \frac{AB}{2}$ άρα ΑΕ = ΖΗ. Επιπλέον, είναι ΑΕ//ΓΔ (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΑΕ//ΖΗ. Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

14877. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ = 8, ΕΔ = 9 και ΔΒ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.



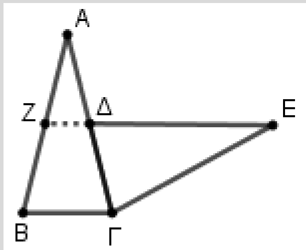
Λύση

α) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ και ισούται με το μισό της.

β) Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 18$

γ) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 18 + 16 = 54$ και η περίμετρος του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ: $\Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$.
Το τρίγωνο έχει μεγαλύτερη περίμετρο.

34332. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$. Έστω Ζ το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.
β) το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



Λύση

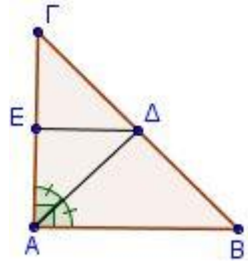
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν:
1) ΑΒ=ΕΔ υπόθεση
2) ΑΓ= ΕΓ υπόθεση
3) $\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = B\Gamma$
Τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρείς πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι ίσα έχουν και $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B}$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $E\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$.
Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των ΔΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ, άρα ΔΖ//ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και ΔΖ//ΒΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.

34398. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ (στη λύση αποδεικνύει ότι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$)
β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.

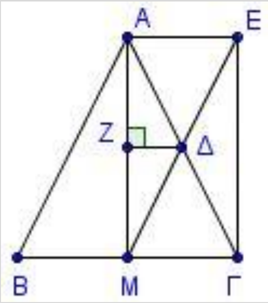
Λύση

α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του.
Επειδή το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΒ, το Ε είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $\Delta E = \frac{AB}{2}$. Όμως ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.



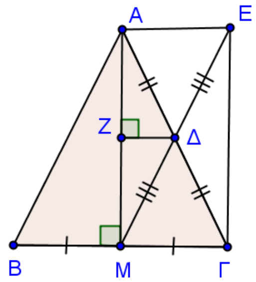
β) Είναι $A\Gamma \perp AB$ και $AB \parallel \Delta E$, άρα είναι και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, οπότε είναι ισοσκελές.

34426. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ = ΜΔ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ κάθετο στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:
Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.
β) $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$.



Λύση

α) Επειδή $ΜΔ = ΔΕ$ και $ΑΔ = ΔΓ$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.
Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $\hat{ΑΜΓ} = 90^\circ$.
Το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο.

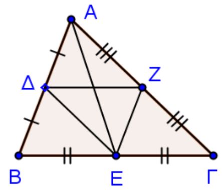


β) Είναι $ΔΖ \perp ΑΜ$ και $ΓΜ \perp ΑΜ$, άρα $ΔΖ \parallel ΓΜ$. Στο τρίγωνο ΑΜΓ, το Δ είναι μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΓΜ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ και $ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$.

34494. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

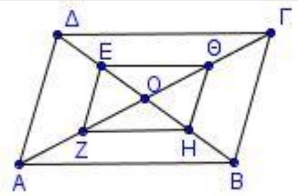
Λύση

α) Τα Δ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΔΖ \parallel ΒΓ \Leftrightarrow ΔΖ \parallel ΒΕ$ και $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΕ$.
Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



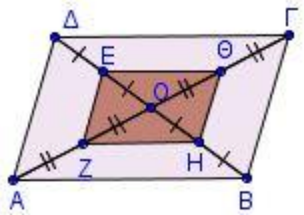
β) Τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΔΕ \parallel ΑΓ \Leftrightarrow ΔΕ \parallel ΑΖ$ και $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ$. Το τετράπλευρο ΑΔΕΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΕ, ΔΖ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ, οπότε διχοτομούνται.

34512. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΖΗΘ.



Λύση

α) Τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΑΔ, άρα $ΕΖ = \frac{ΑΔ}{2}$. Τα Ζ,Η είναι μέσα δύο πλευρών



στο τρίγωνο ΟΑΒ, άρα $ZH = \frac{AB}{2}$.

Τα Η,Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΒΓ, άρα $\Theta H = \frac{B\Gamma}{2}$.

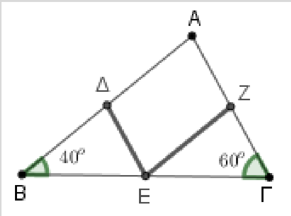
Τα Ε,Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΟΓΔ, άρα $E\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, είναι $EZ = H\Theta$ και $ZH = E\Theta$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΕΖΗΘ οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, ισχύει ότι: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$.

Είναι $EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = = \frac{A\Delta}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} = \frac{40}{2} = 20$

34768. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ.
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.



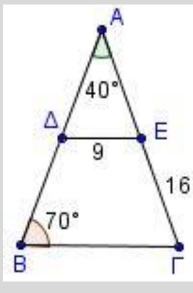
Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$

β) Επειδή τα σημεία Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$. Είναι $B\hat{\Delta}E = \hat{A} = 80^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Επειδή τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι: $EZ \parallel AB$.

γ) $E\hat{\Delta}B = \hat{A} = 80^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΔ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. $\Delta\hat{E}B = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

36088. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$.
Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.
α) Να αποδείξετε ότι
i. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
ii. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ$, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα ίσες πλευρές έχει τις ΑΒ και ΑΓ.

β) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι: $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$.

γ) Είναι $ΕΓ = 16 \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = 16 \Leftrightarrow ΑΓ = 32$, οπότε και $ΑΒ = 32$.

Είναι $2τ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 32 + 18 + 32 = 82$

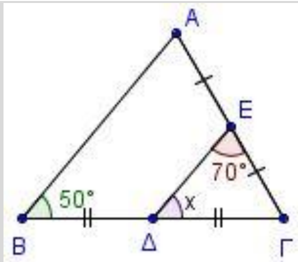
36091. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $Δ\hat{Ε}Γ = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $ΔΕ \parallel ΑΒ$.

β) Να υπολογίσετε

i. τη γωνία $\hat{x}$.

ii. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στη τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

β) i. Είναι $\hat{x} = \hat{Β} = 50^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε:

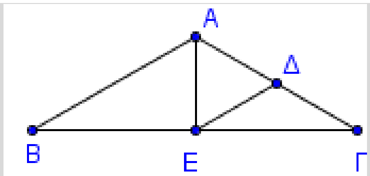
$70^\circ + \hat{x} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 60^\circ$

Είναι $\hat{Α} = \hat{Ε} = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

36224. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Β} = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

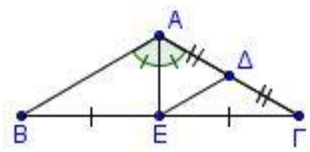
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι

$ΔΕ \parallel ΑΒ$ και $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Είναι $ΔΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = ΔΕ$, άρα το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, έχει $Γ = Β = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΓ, ισχύει ότι $ΔΕΓ = Γ = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε:

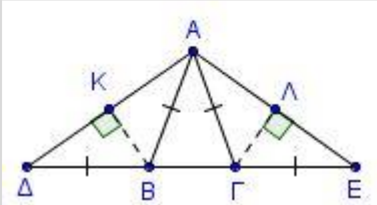
$ΕΔΓ + ΔΕΓ + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow ΕΔΓ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΕΔΓ = 120^\circ$

β) Αρχικά επειδή $ΑΔ = ΔΓ = ΔΕ$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Η ΑΕ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του ΒΓ, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε $ΕΑΔ = 60^\circ$.

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60°, άρα είναι ισόπλευρο.

36356. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΒΔ = 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ = 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή.

ii. τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

Λύση

α) i. Επειδή $AB = B\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή.

ii. Το ΒΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΔ. Όμοια το ΓΛ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, δηλαδή το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

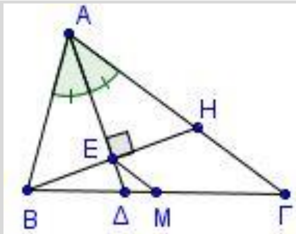
β) Είναι $AB + A\Gamma + B\Gamma = 12 \Leftrightarrow 5 + 5 + B\Gamma = 12 \Leftrightarrow B\Gamma = 2$.

Το τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{5 + 2 + 5}{2} = 6$$

4ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB < A\Gamma)$ και η διχοτόμος του ΑΔ.



Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές.

β) $EM \parallel H\Gamma$

γ) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το ΑΕ είναι και διάμεσος του τριγώνου.

β) Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Ε,Μ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $EM \parallel H\Gamma$ και $EM = \dfrac{H\Gamma}{2}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $AB = AH$. Είναι

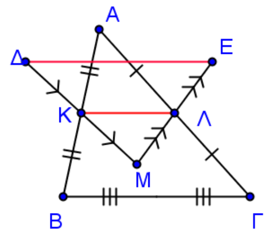
$$EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

1741. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

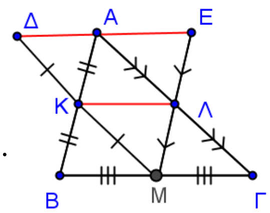
α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β) Στη περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά.

Λύση

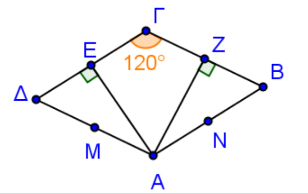


α) Στο τρίγωνο ΜΔΕ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΚΛ \parallel ΔΕ$ (1)
Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΚΛ \parallel ΒΓ$ (2)
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

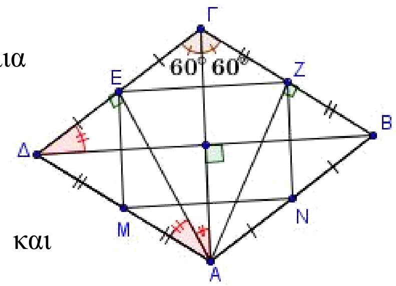


β) Τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα
$ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2}$ και $ΚΜ \parallel ΑΓ$. Όμως $ΚΜ = \frac{ΔΜ}{2}$, άρα $ΔΜ = ΑΓ$ και $ΔΜ \parallel ΑΓ$
,οπότε το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $ΔΑ \parallel ΜΓ$ (3) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
Τα Μ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΜΛ \parallel ΑΒ$ και $ΜΛ = \frac{ΑΒ}{2}$.
Όμως $ΜΛ = \frac{ΜΕ}{2}$, άρα τα ΜΕ, ΑΒ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $ΑΕ \parallel ΔΜ$ (4) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Από τις σχέσεις (3),(4) προκύπτει ότι $ΔΑ \parallel ΑΕ$ και επειδή τα δύο τμήματα έχουν κοινό σημείο το Α, τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά.

1743. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{Γ} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.
ii. $ΑΓ \perp ΕΖ$
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.



Λύση

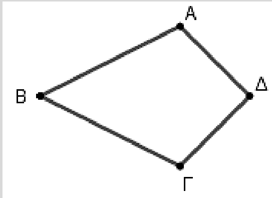


α) i. Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι
$\hat{ΕΓΑ} = \hat{ΑΓΖ} = 60^\circ$. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και έχουν μια γωνία 60°, άρα είναι ισόπλευρα. Τα ΑΕ, ΑΖ είναι ύψη στα ισόπλευρα τρίγωνα, άρα είναι και διάμεσοί του, δηλαδή τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

ii. Επειδή τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, είναι $ΕΖ \parallel ΒΔ$ και $ΕΖ = \frac{ΒΔ}{2}$ (1). Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες ΑΓ,ΒΔ του ρόμβου είναι κάθετες και αφού $ΕΖ \parallel ΒΔ$, θα είναι και $ΑΓ \perp ΕΖ$.

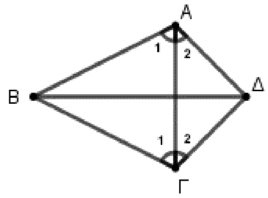
β) Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΜΝ \parallel ΒΔ$ και $ΜΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (2). Από (1),(2) συνεπάγεται ότι τα τμήματα ΕΖ και ΜΝ είναι ίσα και παράλληλα δηλαδή το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι παραλληλόγραμμο. Τα Ε,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ , άρα $ΕΜ \parallel ΑΓ$.
Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$, $ΕΜ \parallel ΑΓ$ και $ΕΖ \parallel ΒΔ$, είναι $ΕΖ \perp ΜΝ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΕΜΝΖ έχει $\hat{ΜΕΖ} = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

1745.Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.
γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



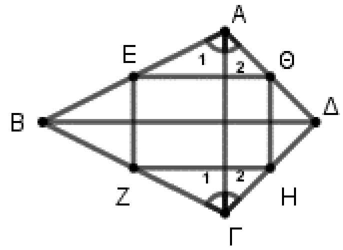
Λύση

α) Επειδή ΒΑ=ΒΓ το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, οπότε οι γωνίες A_1, Γ_1 που είναι στη βάση του είναι ίσες. Επειδή όμως $A = \Gamma$, είναι $A_2 = A - A_1 = \Gamma - \Gamma_1 = \Gamma_2$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΓ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές.



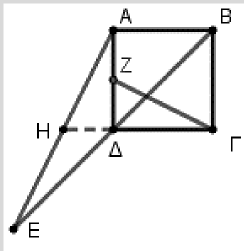
β) Επειδή ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα Α και Γ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα $B\Delta \perp A\Gamma$.

γ) Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο ΒΑΓ τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του όποτε ΕΖ//ΑΓ και ΕΖ=ΑΓ/2. Στο τρίγωνο ΔΑΓ τα Θ, Η είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε ΘΗ//ΑΓ και ΘΗ = ΑΓ/2. Επειδή ΕΖ//ΑΓ και ΘΗ//ΑΓ, είναι και ΕΖ//ΘΗ. Επειδή επιπλέον ΘΗ=ΕΖ, το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΒΑΔ τα Ε,Θ είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε ΕΘ//ΒΔ.



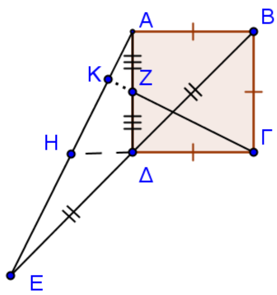
Επειδή ΕΘ//ΒΔ, ΕΖ//ΑΓ και $A\Gamma \perp B\Delta$, είναι και $E\Theta \perp EZ$, δηλαδή $E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ έχει μια ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.

1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ.
Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$
β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.
γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.



Λύση

α) Επειδή το Δ είναι μέσο του ΒΕ και η ΔΗ είναι παράλληλη στη πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΕ, το Η είναι μέσο της πλευράς ΑΕ και ισχύει ότι $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν:
1) $\Delta H = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Delta}{2} = \Delta Z$ και
2) $A\Delta = \Delta\Gamma$ πλευρές του τετραγώνου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Έστω ότι η ΓΖ τέμνει την ΑΗ στο Κ. Είναι $KZA = \Delta Z\Gamma$ ως κατακορυφήν και $KAZ = \Delta\Gamma Z$ γιατί τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΖΒ είναι ίσα.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΓ έχουμε: $\Delta\Gamma Z + \Delta Z\Gamma = 90^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε: $KAZ + KZA = \Delta\Gamma Z + \Delta Z\Gamma = 90^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του προκύπτει ότι και $A\hat{K}Z = 90^\circ$, άρα η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

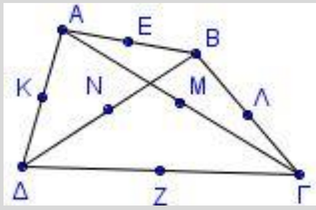
1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΔ = ΒΓ$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.

γ) $ΚΕ = ΖΛ$

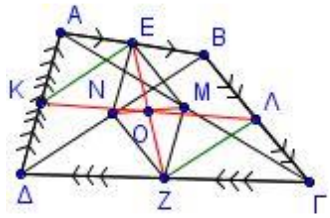
δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Λύση

α) Στα τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ΑΔΓ, ΑΒΓ, τα Ε,Ν,Ζ,Μ είναι μέσα πλευρών άρα $ΕΝ =|| \frac{ΑΔ}{2}$, $ΝΖ =|| \frac{ΒΓ}{2}$, $ΜΖ =|| \frac{ΑΔ}{2}$ και $ΜΕ =|| \frac{ΒΓ}{2}$.

Επειδή $ΑΔ = ΒΓ$, είναι και $ΕΝ = ΝΖ = ΖΜ = ΜΕ$, οπότε το τετράπλευρο ΕΜΖΝ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



β) Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος, οι διαγώνιές του είναι κάθετες , άρα $ΕΖ \perp ΜΝ$ και διέρχεται από το μέσο της ΜΝ. Επομένως ΕΖ μεσοκάθετος της ΜΝ.

γ) Τα Κ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, άρα $ΚΕ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΚΕ \parallel ΒΔ$. Τα Λ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΖ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΛΖ \parallel ΒΔ$. Είναι $ΚΕ = ΛΖ = \frac{ΒΔ}{2}$.

δ) Επειδή τα ΚΕ, ΖΛ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΕΚΖΛ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΕΖ, ΚΛ είναι διαγώνιες του που διχοτομούνται σε σημείο Ο. Τα ΕΖ,ΜΝ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΕΜΖΝ, οπότε διχοτομούνται. Όμως το Ο είναι μέσο της ΕΖ, οπότε θα είναι μέσο και του ΜΝ. Άρα τα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ έχουν κοινό μέσο, οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

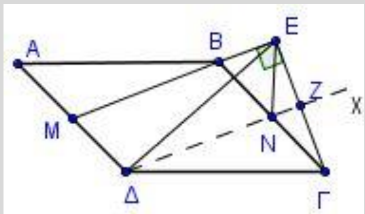
1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(ΓΕ \perp ΜΒ)$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(Δx \parallel ΜΒ)$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.

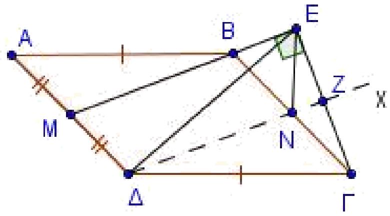
γ) $ΔΕ = ΔΓ$.



Λύση

α) Επειδή $ΑΔ \parallel ΒΓ$, είναι και $ΜΔ \parallel ΒΝ$. Όμως είναι και $ΔΝ \parallel ΜΒ$, άρα το τετράπλευρο ΜΒΝΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

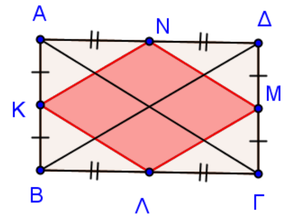
β) Είναι $ΒΝ = ΜΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα το Ν είναι μέσο του τμήματος ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ, το Ν είναι μέσο της ΒΓ και η ΝΖ είναι παράλληλη στη ΒΕ, άρα το Ζ είναι μέσο του ΕΓ.



γ) ΔΖ//ΜΕ και $ΜΕ \perp ΓΕ$ δηλαδή $ΔΖ \perp ΓΕ$. Στο τρίγωνο ΔΕΓ το ΔΖ είναι ύψος και διάμεσος(από β ερώτημα) , άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΔΕ = ΔΓ$.

1794. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

Λύση



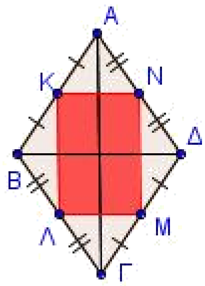
α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).
Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και $ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2).

Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΜ \parallel ΒΔ$ και $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3). Τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (4). Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε από τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

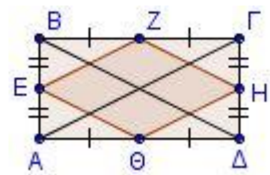
β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει ίσες διαγώνιες για να ισχύουν τα παραπάνω, οπότε δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογώνιο.

1798. α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση



α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).
Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και $ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2).
Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$. Επειδή οι ΑΓ,ΒΔ είναι διαγώνιες του ρόμβου, είναι κάθετες, οπότε και οι ΚΛ, ΚΝ που είναι παράλληλες προς αυτές θα είναι κάθετες, δηλαδή $Κ = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.



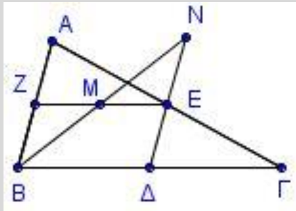
β) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).
Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και $ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2). Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΜ \parallel ΒΔ$ και $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3). Τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (4).
Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε από τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΚΝ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

1801. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή.

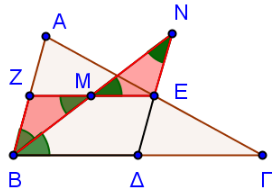
γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$



Λύση

α) Τα Ζ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ZE \parallel B\Gamma$. Τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta E \parallel AB$. Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο

β) Είναι $\Delta BM = ZMB$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΕ,ΒΔ που τέμνονται από τη ΒΝ και $\Delta BM = ZBM$ λόγω της διχοτόμησης, άρα $ZBM = ZMB$ οπότε το τρίγωνο ΖΒΜ είναι ισοσκελές. Είναι $ZBM = MNE$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΝΔ που τέμνονται από την ΒΝ και $ZMB = NME$ ως κατακορυφήν, άρα $MNE = NME$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές.



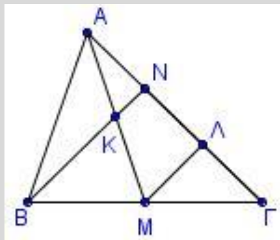
γ) Επειδή το τρίγωνο ΒΖΜ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $BZ = ZM$ και επειδή το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $ME = EN$.
Είναι $ZE = B\Delta$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $B\Delta = \Delta\Gamma$ (Δ μέσο ΒΓ),οπότε $BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$.

1802. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ.

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$

γ) $BK = 3KN$



Λύση

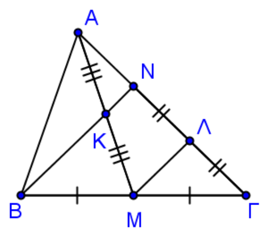
α) Στο τρίγωνο ΒΝΓ τα Μ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $M\Lambda \parallel BN$ και $M\Lambda = \frac{BN}{2}$ (1).Στο τρίγωνο ΑΜΛ το Κ είναι μέσο της ΑΜ και $KN \parallel M\Lambda$, άρα το Ν είναι μέσο της ΑΛ.

β) Η γωνία ΚΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΚΜ, οπότε $KM\Gamma = MBK + BKM$.
Όμως $BKM = AKN$ ως κατακορυφήν, άρα $KM\Gamma = MBK + AKN$.

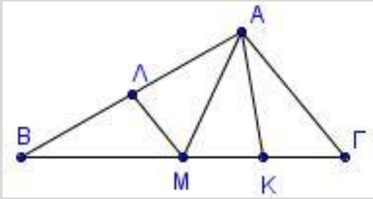
γ) Επειδή τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΜΛ, ισχύει ότι:

$$KN = \frac{M\Lambda}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\frac{BN}{2}}{2} = \frac{BN}{4}.$$

Είναι $BK = BN - KN = BN - \frac{BN}{4} = \frac{3}{4}BN = 3\frac{BN}{4} = 3KN$

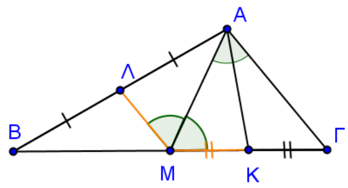


1803. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) $Μ\hat{Α}Γ = Α\hat{Μ}Γ$.
β) $ΜΛ = ΜΚ$.
γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ.



Λύση

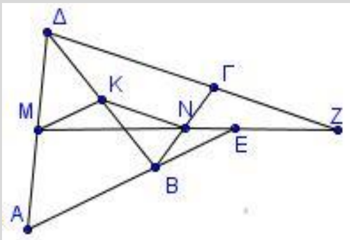
α) Είναι $ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΑΓ}{2} = ΑΓ$, άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ και ισχύει ότι $ΜΑΓ = ΑΜΓ$ (1).



β) Τα Μ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΛ// ΑΓ και $ΜΛ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΜΓ}{2} = ΜΚ$ (ΑΓ=ΜΓ από ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ και Κ μέσο) .

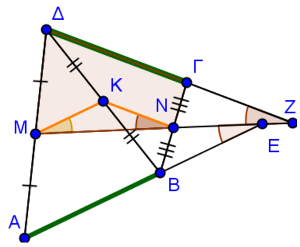
γ) $ΛΜΑ = ΜΑΓ$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΛΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΜ . Από (1) και (2) έχουμε $ΛΜΑ = ΑΜΓ$. Άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ.

1804. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = ΓΔ$ και Μ,Ν,Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ,ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΚ = ΚΝ$
β) $Μ\hat{Ε}Α = Μ\hat{Ζ}Δ$



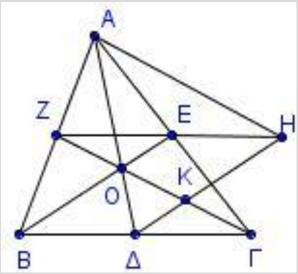
Λύση

α) Τα σημεία Μ και Κ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΔΒΑ, άρα $ΜΚ \parallel ΑΒ$ και $ΜΚ = \frac{ΑΒ}{2}$. Τα σημεία Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΓΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΓΔ}{2}$. Όμως $ΑΒ = ΓΔ$ άρα και $ΜΚ = ΚΝ$.



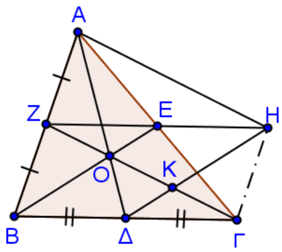
β) Είναι $ΜΕΑ = ΝΜΚ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΚ, ΑΕ που τέμνονται από την ΜΕ και $ΜΖΔ = ΚΝΜ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΚΝ, ΔΖ που τέμνονται από την ΜΖ.
Όμως $ΝΜΚ = ΚΝΜ$ γιατί το τρίγωνο ΚΜΝ είναι ισοσκελές, άρα και $ΜΕΑ = ΜΖΔ$.

1820. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα $ΕΗ = ΖΕ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ.



Λύση

α) Επειδή τα Ζ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΖΕ \parallel ΒΓ \Leftrightarrow ΕΗ \parallel ΒΔ$ και $ΖΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΗ = ΒΔ$.
Στο τετράπλευρο ΕΗΔΒ δύο απέναντι πλευρές του, οι ΕΗ, ΔΒ είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



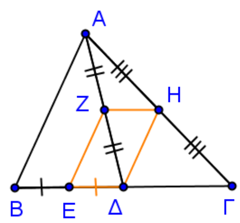
β) Είναι $ΒΕ = ΔΗ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΕΗΔΒ. Επειδή $ΕΗ = ΖΕ$ ΚΑΙ $ΑΕ = ΕΓ$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΖΓΗ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι $ΓΖ = ΑΗ$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΔΗ έχουμε: $ΑΔ + ΔΗ + ΑΗ = ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ$.

γ) Στο τρίγωνο ΒΟΓ το Δ είναι μέσο της ΒΓ και $ΔΚ \parallel ΒΟ$, άρα το Κ είναι μέσο της ΟΓ, δηλαδή $ΓΚ = ΚΟ$ (1). Στο τρίγωνο ΖΚΗ το Ε είναι μέσο της ΖΗ και $ΕΟ \parallel ΚΗ$, άρα το Ο είναι μέσο της ΖΚ, δηλαδή $ΚΟ = ΟΖ$ (2). Από τις (1),(2) είναι $ΓΚ = ΚΟ = ΟΖ$, δηλαδή οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ.

1898. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.
γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή),να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

Λύση

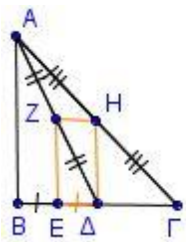
α) Τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΕΖ \parallel ΑΒ$ και $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Τα Δ,Η είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΔΗ \parallel ΑΒ$ και $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$.
Είναι $ΕΖ = ΔΗ$ και $ΕΖ \parallel ΔΗ$, οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Είναι ΖΗ, ΕΔ απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ, οπότε

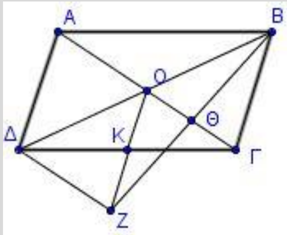
$ΖΗ = ΕΔ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$. Τα Ζ,Ε είναι μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ ,άρα ΖΕ//ΑΒ και $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Αν το ΔΕΖΗ είναι ρόμβος, τότε $ΖΕ = ΖΗ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{4} \Leftrightarrow 2ΑΒ = ΒΓ$.

γ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β, τότε επειδή $\Delta H \parallel AB$ και $B\Gamma \perp AB$, θα είναι και $B\Gamma \perp \Delta H$, δηλαδή $H\hat{\Delta}E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ θα έχει μια ορθή γωνία και θα είναι ορθογώνιο.

1877. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.



Να αποδείξετε ότι:

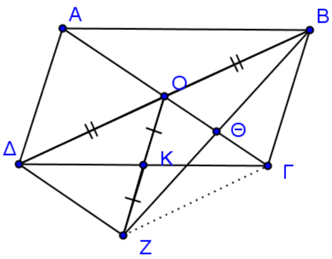
α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.

β) $AO = \Delta Z$

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΔΒΓ τα Ο,Κ είναι μέσα δύο πλευρών άρα $OK \parallel B\Gamma$ και $OK = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2OK = OZ$. Στο τετράπλευρο ΒΓΖΟ οι πλευρές του ΟΖ και ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιές του διχοτομούνται.
Δηλαδή τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.



β) Επειδή η ΟΖ είναι ίση και παράλληλη με την ΒΓ και η ΒΓ με τη σειρά της είναι ίση και παράλληλη με την ΑΔ, τα τμήματα ΟΖ και ΑΔ είναι ίσα και παράλληλα.

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ έχουν:
1) $AO = \Delta Z$
2) $\Gamma Z = OB$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο ΒΓΖΟ και
3) $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.
Άρα λόγω του κριτηρίου ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.

13743. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

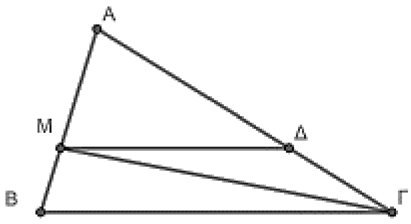
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$.

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.

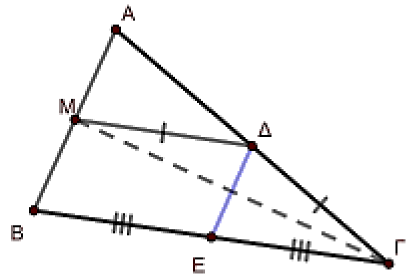
γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Είναι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.



β) Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta M\Gamma = \Delta\Gamma M$.
Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$,

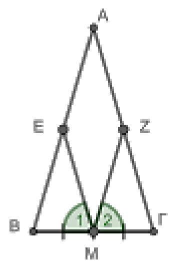


οπότε $\Delta\Gamma M = B\Gamma M$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.
Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του.
Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

γ) Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και έχουμε φέρει ΜΔ//ΒΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ. Δίνεται ότι το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΑΒ, ή ΔΕ//ΜΒ. Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο

13745. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.
α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
i. ΜΕ = ΜΖ.
ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ.
β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:
i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;
ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

Λύση

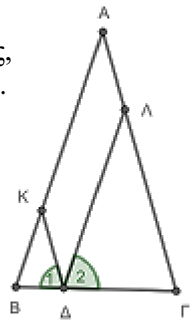


α) i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ΜΕ//ΑΓ, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΒ και $ME = \frac{A\Gamma}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε ΜΖ//ΑΒ , το Ζ είναι μέσο της ΑΓ και $MZ = \frac{AB}{2}$ (2).
Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ.

ii. Από την υπόθεση είναι ΜΕ//ΑΓ ή ΜΕ//ΑΖ και ΜΖ//ΑΒ ή ΜΖ//ΑΕ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α)i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με $AE + EM + MZ + AZ = 4AE \ = 4\frac{AB}{2} = 2AB$.

Το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και $AE = \frac{AB}{2}$ αφού Ε μέσο της ΑΒ.



β) i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού ΔΚ//ΑΓ ή ΔΚ//ΑΛ και ΔΛ//ΑΒ ή ΔΛ//ΑΚ. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο.
Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος. Οι γωνίες Γ και Δ_1 είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\Delta_1 = \Gamma$, άρα $\Delta_1 = B$, (αφού οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου) .
Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΚΔ = ΚΒ (3).

Όμοια οι γωνίες B και Δ_2 είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\Delta_2 = B$, άρα $\Delta_2 = \Gamma$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΔ = ΛΓ (4).

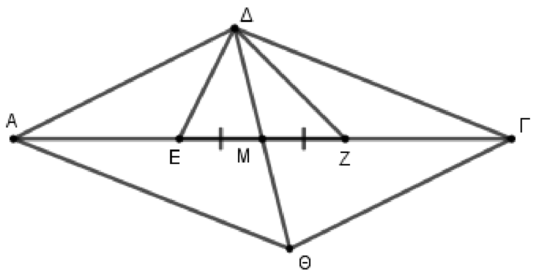
Επειδή $\Delta_1 = B$ και $\Delta_2 = B$,προκύπτει ότι $\Delta_1 = \Delta_2 = B = \Gamma$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες του, ΒΚΔ και ΓΛΔ είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΒΚΔ και ΓΛΔ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με ΑΚ + ΚΔ + ΔΛ + ΛΑ με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) του β)i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με
ΑΚ + ΚΒ +ΓΛ + ΛΑ = ΑΒ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ = 2ΑΒ.
Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.

13856.Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;

Λύση

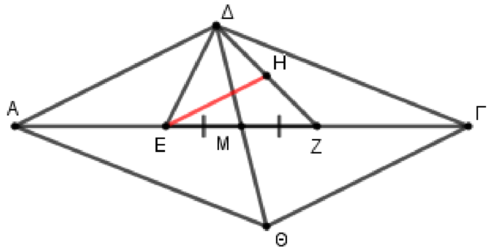
α) Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΕΖ άρα ΜΕ=ΜΖ, επίσης ΕΑ=ΕΖ=ΖΓ (από υπόθεση) άρα: ΜΕ+ΕΑ=ΜΖ+ΖΓ ή ΜΑ=ΜΓ.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ που έχουν:
- ΔΜ=ΜΘ (από υπόθεση)
- ΜΑ=ΜΓ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΕ+ΕΑ και ΜΖ+ΖΓ)
- $\Delta M A = \Theta M \Gamma$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΔΘ (από υπόθεση) και μέσο του τμήματος ΑΓ (ii στη σύγκριση του ερωτήματος α)).
Στο τετράπλευρο ΘΑΔΓ οι διαγώνιοι ΔΘ και ΑΓ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

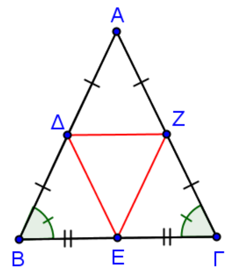


γ) Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς ΔΖ αφού η ΕΗ είναι διάμεσος. Από υπόθεση έχουμε ΕΑ=ΕΖ, άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΖ. Στο τρίγωνο ΑΔΖ τα σημεία Ε και Η είναι μέσα πλευρών άρα $EH = \frac{A\Delta}{2}$ ή $EH = \frac{12}{2} = 6$.
Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ θα έχει μήκος 6.

37096. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
i. ισόπλευρο τρίγωνο.
ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

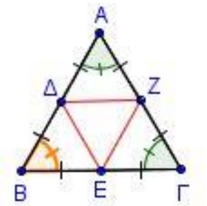
Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Δ,Ε,Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα.

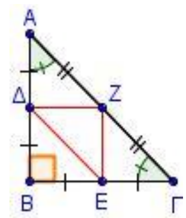


1ος τρόπος: Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΖΕ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΖ$ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
2) $ΒΕ = ΕΓ$
3) $Β = Γ$ στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $ΔΕ = ΕΖ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος: Τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΔΕ = \frac{ΑΓ}{2}$. Τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.
Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$, είναι και $ΔΕ = ΕΖ$, δηλαδή το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

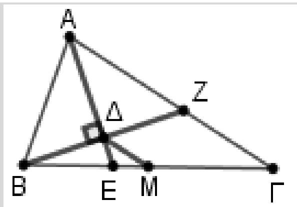


β) i. Επειδή τα Δ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$. Επειδή $ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ$ είναι και $ΔΕ = ΕΖ = ΔΖ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



ii. Έστω ότι $Β = 90^\circ$, τότε επειδή $ΔΖ \parallel ΒΓ$, $ΖΕ \parallel ΑΒ$ και $ΑΒ \perp ΒΓ$ θα είναι και $ΔΖ \perp ΖΕ$, άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο.
Επειδή $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$, $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΑΒ = ΒΓ$ θα είναι και $ΔΖ = ΖΕ$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι και ισοσκελές.

37106. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΒΓ$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.
β) $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$.
γ) $Ε\hat{Δ}Μ = \frac{Β}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΔ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ΒΔ διάμεσος.

β) Τα Δ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα $ΔΜ \parallel ΖΓ \Leftrightarrow ΔΜ \parallel ΒΓ$ και

$$ΔΜ = \frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΒΓ - ΒΖ}{2} \underset{\overset{\Delta}{ΑΒΖ}\ \text{ισοσκελές}}{\overset{ΒΖ=ΑΒ}{=}} \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$$

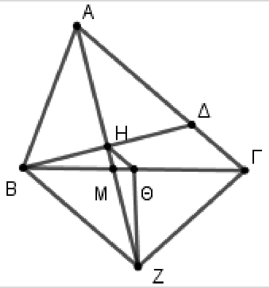
γ) $ΕΔΜ = ΕΒΓ = \frac{Β}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΜ,ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ.

37165.Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

β) ΗΘ//ΒΖ.

γ) $\mathrm{H\Theta} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$



Λύση

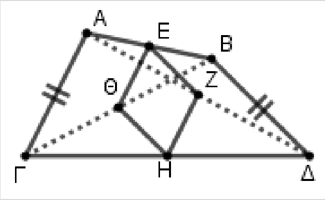
α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΑΗ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το ΑΗ είναι και διάμεσος. Άρα ΒΗ = ΗΔ. Επίσης από υπόθεση ισχύει ότι ΑΗ = ΗΖ. Συνεπώς, στο τετράπλευρο ΑΒΖΔ οι διαγώνιες του ΑΖ, ΒΔ διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

β) Το ΗΘ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΒΔΓ, άρα ΗΘ // ΔΓ $\Leftrightarrow$ ΗΘ // ΑΔ (1)
Επειδή το ΑΒΖΔ είναι ρόμβος ισχύει ότι ΒΖ // ΑΔ (3). Από τις (1), (3) προκύπτει ότι ΗΘ // ΒΖ

γ) Το ΗΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ και ΒΓ του τριγώνου ΒΔΓ οπότε
$\mathrm{H\Theta} = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{A\Delta}}{2} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$ διότι ΑΒ = ΑΔ αφού ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

3ο Θέμα

11896. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι ΑΔ = ΒΓ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
α. ΕΖ / / = ΗΘ
β. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $ΕΖ = / / \frac{ΒΓ}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο ΔΒΓ τα Θ, Η είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $ΘΗ = / / \frac{ΒΓ}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ / / = ΗΘ .

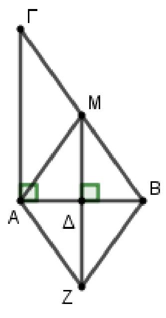
β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΒΑΔ τα Ε, Θ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $ΕΘ = / / \frac{ΑΔ}{2}$. Όμως ΑΔ = ΒΓ, οπότε $ΕΘ = ΕΖ$. Στο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

12068. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε $ΜΔ \perp ΑΒ$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.
β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

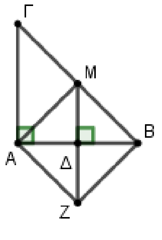
Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΜΒΖ το ΒΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΜΖ.



ii. Είναι $ΜΔ \perp ΑΒ$ και $ΑΓ \perp ΑΒ$ άρα $ΜΔ / / ΑΓ$.
Επειδή Μ μέσο της ΒΓ και ΜΔ//ΑΓ, το Δ είναι μέσο της ΑΒ.
Στο τετράπλευρο ΜΑΖΒ οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

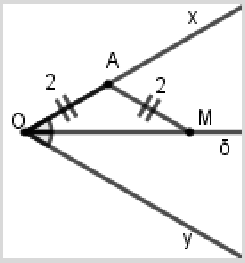
β) Είναι $ΜΔ = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΜΖ = ΑΓ$.
Αν το ΑΒΓ ήταν ορθογώνιο και ισοσκελές τότε ΑΒ = ΑΓ, οπότε και ΜΖ = ΑΒ, οπότε ο ρόμβος θα είχε τις διαγώνιες του ίσες και θα ήταν τετράγωνο.



Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

2ο Θέμα

13653. Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε ΑΟ = 2. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΜ = ΑΟ. Να υπολογίσετε:



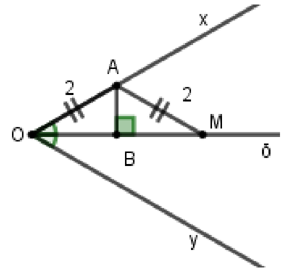
α) Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.
β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.
γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

Λύση

α) Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$, οπότε οι γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ θα είναι ίσες. Άρα, $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = 60^o : 2 = 30^o$.

β) Είναι $A\hat{O}M = x\hat{O}\delta = 30^o$. Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση ΟΜ, αφού ΑΟ = ΑΜ. Επομένως, οι γωνίες $A\hat{O}M$ και $A\hat{M}O$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση. Άρα, $A\hat{O}M = A\hat{M}O = 30^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΟΜ ισχύει: $A\hat{O}M + A\hat{M}O + M\hat{A}O = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + M\hat{A}O = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{A}O = 120^\circ$.

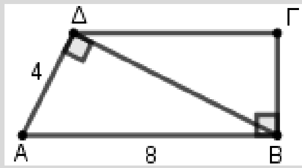


γ) Φέρουμε το ύψος ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $AOB = 30^\circ$, οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η ΑΒ, ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΑ.

Άρα, $AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1$

13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:



α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.
β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία ΔΒΑ ισούται με 30º δηλαδή $\Delta BA = 30^\circ$.

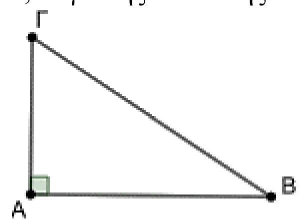
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta AB + \Delta + \Delta BA = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta AB = 60^\circ$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $AB\Delta = B\Delta\Gamma = 30^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30ο άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$.

13831.Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.
α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;
β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30^o , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:
i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;
ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

Λύση

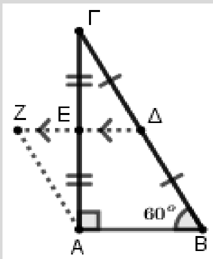
α) Το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο. Απέναντι από την ορθή γωνία Α είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Αυτή είναι η ΒΓ. Οι άλλες δύο πλευρές είναι μικρότερες από την ΒΓ και, λόγω της υπόθεσης ΑΒ > ΑΓ, άρα η μικρότερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΑΓ.
Όμως, απέναντι από τη μικρότερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται η μικρότερη γωνία του. Άρα, η γωνία Β είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.



β) i. Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30^o η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60^o . Όμως η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η Β, άρα
$B = 30^\circ$ και $\Gamma = 60^\circ$.

ii. Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον $B = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας Β είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

13837.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.
Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.
Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.
α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.

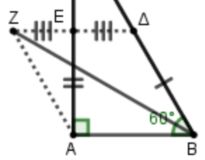


Λύση

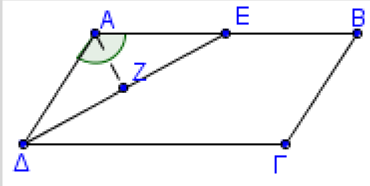
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΕΔ που έχουν:
- ΑΕ=ΕΓ (από υπόθεση)
- ΕΖ=ΕΔ (από υπόθεση)
- $AEZ = \Gamma E\Delta$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα ΑΖ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών AEZ και $\Gamma E\Delta$.
ή
Το Ε μέσο των ΖΔ,ΑΓ άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΖΓΔ διχοτομούνται οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και ΑΖ=ΓΔ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου)

β) ΑΖ=ΓΔ από το α) ερώτημα και ΓΔ=ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα $AZ = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}$.
Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\Gamma = 30^\circ$, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.



14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=120^\circ$ και $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

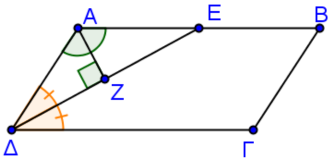


α) $A\hat{\Delta}E=30^\circ$ **β)** $AZ=\dfrac{AB}{4}$

Λύση

α) Είναι $E\Delta\Gamma = AE\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ και $E\Delta\Gamma = A\Delta E$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ, άρα είναι και $A\Delta E = AE\Delta$.Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

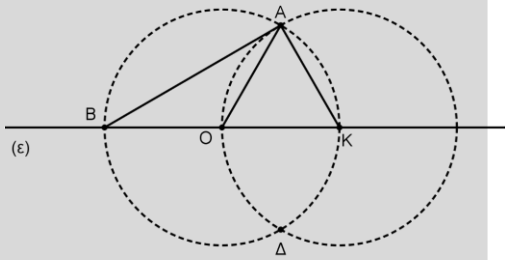
$$A + A\Delta E + AE\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 120^\circ + 2A\Delta E = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\Delta E = 60^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 30^\circ.$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ είναι $A\Delta E = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή, $AZ=\dfrac{A\Delta}{2}$. Όμως $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \dfrac{AB}{2}$, άρα

$$AZ=\frac{\frac{AB}{2}}{2}=\frac{AB}{4}.$$

34314.Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (Ο,ρ) και (Κ,ρ) τεμνόμενους στα σημεία Α και Δ, με τα κέντρα τους Ο και Κ να βρίσκονται σε ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (Ο,ρ) σε σημείο Β, και τη διάκεντρό τους ΟΚ να είναι ίση με ρ.



α) Να αποδείξετε ότι:
 i. το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο,
 ii. το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΒΚ.

Λύση

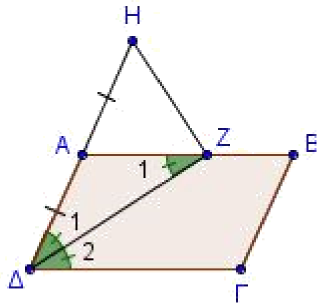
α) i.Είναι ΟΑ=ΟΚ=ΚΑ= ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.

ii. Επειδή ΟΑ=ΟΒ=ΟΚ= ρ στο τρίγωνο ΑΒΚ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ είναι $AK=\dfrac{BK}{2}$, οπότε $A\hat{B}K=30^\circ$.

34393. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ.

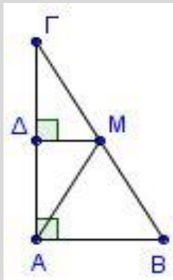
Λύση



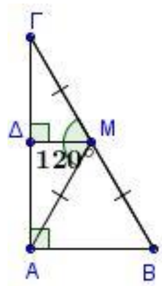
α) Είναι $\Delta_2 = Z_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΖ και $\Delta_2 = \Delta_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ, άρα $\Delta_1 = Z_1$. Το τρίγωνο ΑΔΖ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΖ, είναι $\Delta A = AZ$,όμως $\Delta A = AH$, άρα $ZA = A\Delta = AH = \frac{\Delta H}{2}$. Στο τρίγωνο ΔΖΗ η διάμεσος του ΖΑ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΗ, δηλαδή $Z = 90^\circ$.

34406. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = 8\,\text{cm}$.
Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$.
Αν $A\hat{M}\Gamma = 120^\circ$, τότε:
α) Να δείξετε ότι $AB = 4\,\text{cm}$.
β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.



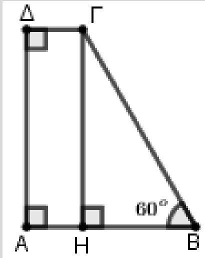
Λύση



α) Επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $AM = MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Επειδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, ισχύει ότι: $\Gamma = \Gamma AM$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΜΓ έχουμε:
$\Gamma + \Gamma AM + AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$.
Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η ΑΒ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = 4\,\text{cm}$.

β) Η ΜΔ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ,Δ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $M\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$

34408.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$,
ΑΒ > ΓΔ, ΒΓ = 4 ΔΓ , $\hat{B} = 60^\circ$ και ΓΗ ⊥ ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $HB = 2\Delta\Gamma$.
β) το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΗ = $\frac{1}{2}$ΗΒ.

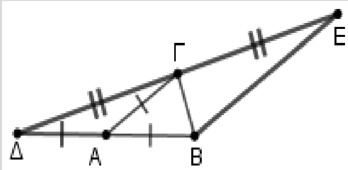


Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $\hat{B}+B\hat{\Gamma}H+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+B\hat{\Gamma}H+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow$ $B\hat{\Gamma}H=180^\circ-150^\circ=30^\circ$, οπότε $BH=\frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow HB=\frac{4\Delta\Gamma}{2}=2\Delta\Gamma$.

β) Το τετράπλευρο ΑΗΓΔ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Οι ΓΔ, ΑΗ είναι απέναντι πλευρές του, άρα $AH=\Gamma\Delta=\frac{1}{2}HB$.

34411. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$.
Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB=A\Delta$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.
β) $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma=\frac{BE}{2}$.

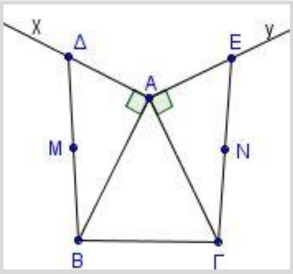


Λύση

α) Είναι $A\Delta=AB=A\Gamma$, άρα $\Gamma A=\frac{\Delta B}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΔΓΒ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΒ, δηλαδή $B\Gamma\Delta=90^\circ$.

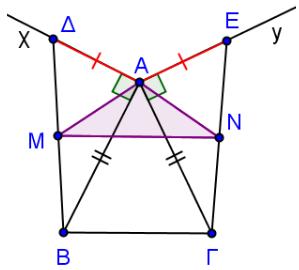
β) Επειδή $AB=A\Delta$ και $\Delta\Gamma=\Gamma E$, τα σημεία Α,Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΕ, άρα $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma=\frac{BE}{2}$.

34420. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.
α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.



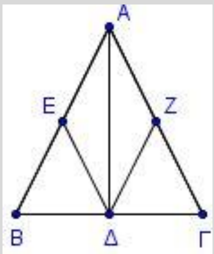
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) $AB=A\Gamma$ και
2) $A\Delta=AE$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta=\Gamma E$



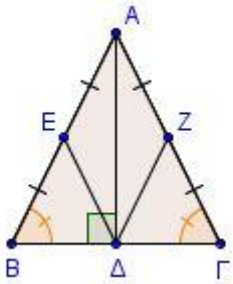
β) Το ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, άρα $AM=\frac{B\Delta}{2}$. Το ΑΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ, άρα $AN=\frac{E\Gamma}{2}$.
Επειδή $B\Delta=\Gamma E$, είναι και $AM=AN$, άρα το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

34492. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:
1) $ΒΕ = ΓΖ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
2) $ΒΔ = ΓΔ$, γιατί το ΑΔ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσός του και
3) $Β = Γ$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

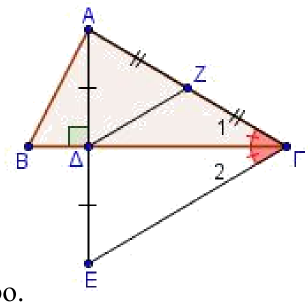


β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΑΕ = ΒΕ$ (1).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, το ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα
$ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΖ = ΖΓ$ (2)
Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι στο τετράπλευρο ΑΕΔΖ οι πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

34495. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $\hat{Γ} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$.
β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.

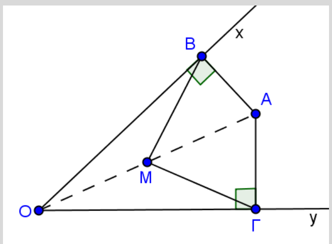
Λύση

α) Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$.



β) Στο τρίγωνο ΑΓΕ η ΓΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΓΔ είναι και διχοτόμος του τριγώνου. Άρα $Γ_2 = Γ_1 = 30^\circ$ και $ΑΓΕ = 60^\circ$.
Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ έχει μια γωνία του ίση με 60°, άρα είναι ισόπλευρο.

34515. Δίνεται γωνία xOy και σημείο Α στο εσωτερικό της.
Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.
γ) $Β\hat{Μ}Α = 2x\hat{Ο}Α$.



Λύση

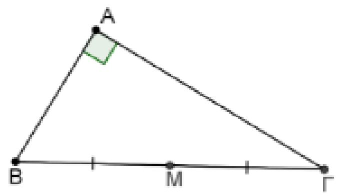
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ το ΒΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{OA}}{2}$. Όμως και $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{OA}}{2}$, οπότε ΒΜ = ΑΜ και το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΟ το ΓΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Gamma\mathrm{M} = \frac{\mathrm{OA}}{2}$. Επειδή $\mathrm{BM} = \Gamma\mathrm{M}$, το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ.

γ) Επειδή $\mathrm{BM} = \mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OA}}{2}$, το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΒ και ισχύει ότι $\mathrm{xOA} = \mathrm{MBO}$. Η γωνία ΒΜΑ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΜΟ, άρα $\mathrm{BMA} = \mathrm{xOA} + \mathrm{MBO} = 2\mathrm{xOA}$.

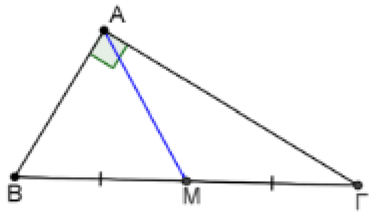
36086. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ\right)$ με $\hat{\mathrm{B}} = 2\hat{\Gamma}$ και Μ το μέσο της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.
γ) Να βρείτε τη γωνία ΑΜΓ.

Λύση



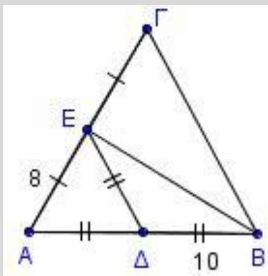
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$ $3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$ και $\mathrm{B} = 60^\circ$.

β) Το ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$. Όμως και $\mathrm{M}\Gamma = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$, άρα ΑΜ=ΜΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.



γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΜΓ, είναι $\Gamma\mathrm{AM} = \Gamma = 30^\circ$.
Στο τρίγωνο ΑΜΓ είναι
$\Gamma\mathrm{AM} + \Gamma + \mathrm{AM}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \mathrm{AM}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \mathrm{AM}\Gamma = 120^\circ$

36093. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $\mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{B}$ με $\mathrm{AE} = 8$ και $\Delta\mathrm{B} = 10$.
α) Να αποδείξετε ότι
i. το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.
ii. $\mathrm{B}\Gamma = 20$.
β) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

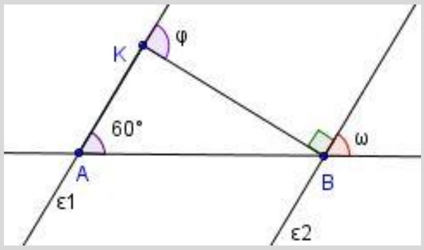
α) Επειδή $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$, στο τρίγωνο ΑΕΒ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Αρχικά είναι $\mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{B} = 10$.

Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{2} \Leftrightarrow \mathrm{B}\Gamma = 20$.

γ) Είναι $2\tau = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta B + 20 + 2AE = 20 + 20 + 16 = 56$

36097. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



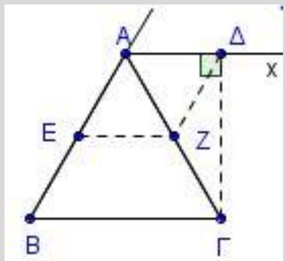
Λύση

α) Είναι $\omega = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την ΑΒ.
Επειδή $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB \perp \varepsilon_2$, είναι και $AB \perp \varepsilon_1$, άρα $\varphi = 90^\circ$.

β) Επειδή $K = 90^\circ$ το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:
$A + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow ABK = 30^\circ$, τότε όμως η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $AK = \dfrac{AB}{2} = 3$.

36103. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΕΖ = ΑΕ= ΑΖ,
β) η γωνία $A\Gamma\Delta$ είναι ίση με 60°.
γ) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.



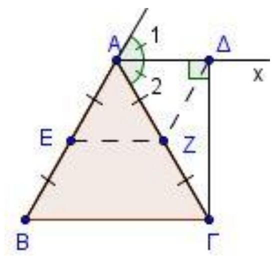
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $A = B = \Gamma = 60^\circ$

Είναι $A_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - A = 120^\circ$ και $A_2 = \dfrac{A_{\varepsilon\xi}}{2} = 60^\circ = \Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η διάμεσος του $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2} = AZ$.

Το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60°, άρα είναι ισόπλευρο, οπότε ΕΖ=ΑΕ=ΑΖ.



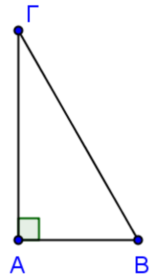
β) Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $A_2 + A\Gamma\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A\Gamma\Delta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

γ) Τα σημεία Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $EZ = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

Ακόμη είναι $AE = \dfrac{AB}{2}$, $A\Delta = \Delta Z = AZ = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2}$, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

36109. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^\circ$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
β) Αν η πλευρά $B\Gamma=2\,cm$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

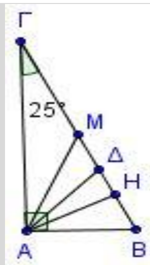
Λύση



α) Επειδή $A+\Gamma=120^\circ$ και είναι και $A=3\Gamma$
$3\Gamma+\Gamma=120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma=120^\circ \Leftrightarrow \Gamma=30^\circ$ και $A=3\Gamma=3\cdot 30^\circ=90^\circ$
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$A+B+\Gamma=180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ+B+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow B=60^\circ$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma=30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα $AB=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{2}{2}=1cm$

36111. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=25^\circ$.
Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$.
β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}H=20^\circ$.

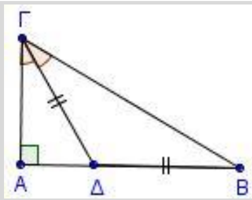


Λύση

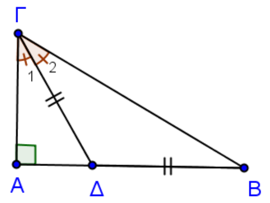
α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$B+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow B+25^\circ=90^\circ \Leftrightarrow B=65^\circ$.
Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα
$AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma=MB$.
Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, οπότε $MA\Gamma=\Gamma=25^\circ$ και
$MAB=B=65^\circ$.
Η γωνία ΑΜΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα $AMB=MA\Gamma+\Gamma=50^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΗΑΒ έχουμε:
$HAB+B=90^\circ \Leftrightarrow HAB+65^\circ=90^\circ \Leftrightarrow HAB=25^\circ$.
Η γωνία ΑΔΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα
$A\Delta B=\Delta A\Gamma+\Gamma=\frac{A}{2}+25^\circ=45^\circ+25^\circ=70^\circ$.

β) Είναι $MA\Delta=\Delta A\Gamma-MA\Gamma=45^\circ-25^\circ=20^\circ$ και $\Delta AH=\Delta AB-HAB=45^\circ-25^\circ=20^\circ$

36116. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\Delta B=2cm$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{B}=30^\circ$. **β)** $AB=3cm$



Λύση



α) Επειδή $ΓΔ = ΔΒ$, το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα

$Β = Γ_2 = \frac{Γ}{2}$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$Β + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{Γ}{2} + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Γ + 2Γ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

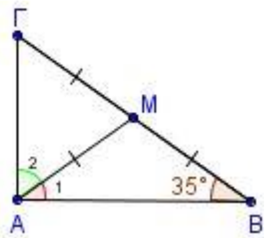
$$3Γ = 180^\circ \Leftrightarrow Γ = 60^\circ \text{ και } Β = \frac{Γ}{2} = 30^\circ$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $Γ_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = 30^\circ$, άρα $ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{cm}$. Τότε

$ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 1\text{cm} + 2\text{cm} = 3\text{cm}$

36169. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$, $\hat{Β} = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ.

Λύση



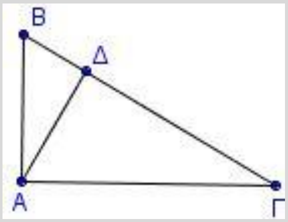
α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $Β + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Γ = 55^\circ$

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ = ΜΓ$.

Επειδή $ΑΜ = ΜΒ$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, άρα $Α_1 = Β = 35^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΜΒ έχουμε:

$$ΑΜΒ + Α_1 + Β = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΜΒ + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow ΑΜΒ = 110^\circ$$

36171. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$, $2\hat{Γ} = \hat{Β}$ και ΑΔ το ύψος του.
α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι: $ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2}$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

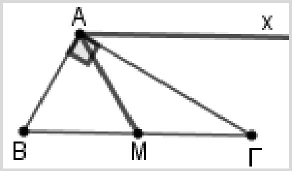
$Β + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 2Γ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow 3Γ = 90^\circ \Leftrightarrow Γ = 30^\circ$ και $Β = 2Γ = 60^\circ$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$\hat{Β} + Β\hat{Α}Δ = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Β\hat{Α}Δ = 90^\circ \Leftrightarrow Β\hat{Α}Δ = 30^\circ$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $Β\hat{Α}Δ = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2}$.

36328. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:



α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$

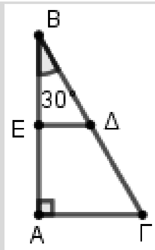
β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx.

Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$.

β) Είναι $M\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}x$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ, όμως $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$, άρα $M\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}x$, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx.

36342. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.
Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:



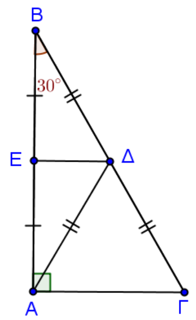
α) ΑΓ

β) ΒΓ

γ) ΑΔ

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση



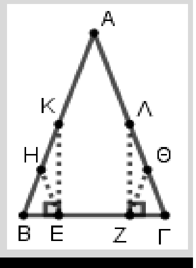
α) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι

$$\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B = 30^\circ$, άρα $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 4$.

γ) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.

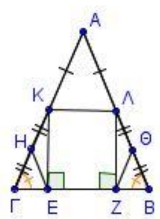
36343. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.

β) $EH = Z\Theta$, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.

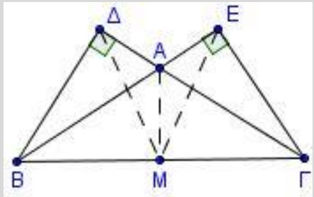
Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ έχουν:
1) $K\Gamma = \Lambda B$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
2) $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα.

β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, άρα $\text{ΕΗ} = \frac{\text{ΚΓ}}{2}$. Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα $\text{ΖΘ} = \frac{\text{ΛΒ}}{2}$. Επειδή $\text{ΚΓ} = \text{ΛΒ}$, είναι και $\text{ΕΗ} = \text{ΖΘ}$.

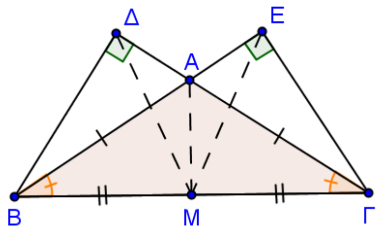
36350. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}} > 90^\circ$.
Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$.
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι $\text{ΜΔ} = \text{ΜΕ}$.
ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.

Λύση

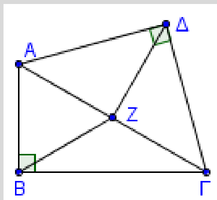
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$.



β) i. Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα $\text{ΔΜ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$ (1). Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, άρα $\text{ΕΜ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\text{ΜΔ} = \text{ΜΕ}$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:
1) $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$ και
2) $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$, δηλαδή
έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά μια προς μία ίσες, άρα είναι ίσα και έχουν $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$.
Επειδή $\text{ΜΔ} = \text{ΜΕ}$ και $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$, τα Μ, Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΔΜΕ.

36355. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Β}} = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ.
Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{\text{Δ}} = 90^\circ$.



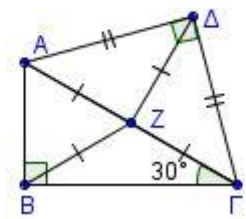
α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΖ} = \text{ΔΖ}$.
β) Αν $\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ.

Λύση

α) Η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $\text{ΒΖ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$ (1). Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

$\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} + \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$\text{ΔΖ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\text{ΒΖ} = \text{ΔΖ}$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} + \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = 60^\circ$.
Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45°, δηλαδή

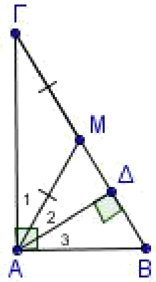
$\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$. Είναι και $B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

37006. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \Gamma\hat{A}\Delta$

β) $A\hat{M}\Delta = 2\hat{\Gamma}$.

Λύση



α) Οι γωνίες Β και ΑΓΔ είναι οξείες με πλευρές κάθετες ($AB \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp A\Delta$ οπότε είναι ίσες.

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$. Η γωνία ΑΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα $A\hat{M}\Delta = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$.

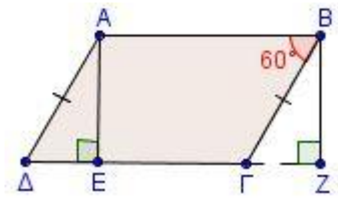
37007. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ.

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο.

Λύση



α) Επειδή $BZ \perp \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma \parallel AB$, είναι $BZ \perp AB$.
Τότε $\Gamma\hat{B}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει ότι $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και
2) $B\hat{\Gamma}Z = \hat{B} = 60^\circ = \hat{\Delta}$ γιατί οι γωνίες ΒΓΖ και Β είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ και οι γωνίες Β και Δ είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση και είναι ίσα.

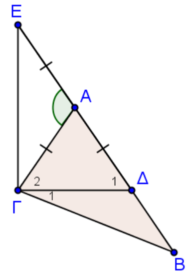
γ) Επειδή $\hat{E} = \hat{Z} = A\hat{B}Z = 90^\circ$, το τετράπλευρο ΑΒΖΕ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

37016. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ \perp ΕΓ$

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ.

Λύση

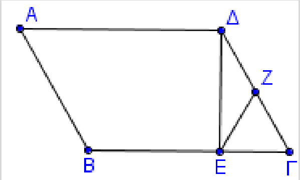


α) Επειδή $ΑΕ = ΑΓ = ΑΔ$, στο τρίγωνο ΕΓΔ η διάμεσος του ΓΑ είναι ίση με το μισό της πλευράς ΔΕ στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή, δηλαδή $Ε\hat{Γ}Δ = 90^\circ$, άρα $ΔΓ \perp ΕΓ$.

β) Επειδή $ΑΔ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΓ, άρα $\hat{Γ}_2 = Α\hat{Δ}Γ$.Η γωνία ΕΑΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα:

$Ε\hat{Α}Γ = \hat{Γ}_2 + Α\hat{Δ}Γ = 2Α\hat{Δ}Γ$.

37017. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{Β} = 120^\circ$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου.

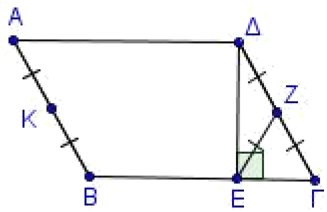
β) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ.

Λύση

α) Οι γωνίες Α και Β είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Δηλαδή $\hat{Α} + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 60^\circ$.

Οι γωνίες Α και Γ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Γ} = 60^\circ$.



β) Η ΕΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ, άρα $ΕΖ = \frac{ΔΓ}{2}$. Όμως $ΑΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΒ = ΓΔ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα είναι και $ΕΖ = ΑΚ$.

γ) Είναι $ΕΖ = \frac{ΔΓ}{2} = ΖΓ$, άρα το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές και επειδή έχει $\hat{Γ} = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο. Άρα $Ε\hat{Ζ}Γ = 60^\circ$.

4ο Θέμα

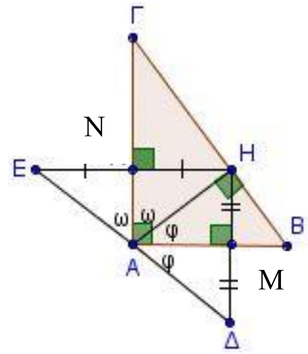
1737. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $AH = A\Delta = AE$.

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.

γ) Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά και ΜΝ=ΔΕ/2.

Λύση

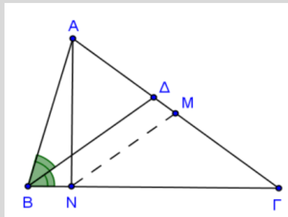


α) Στο τρίγωνο ΑΗΔ, η ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH = A\Delta$ και η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΑΔ.
Στο τρίγωνο ΕΑΗ το ΑΛ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH = AE$ και η ΑΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΗ.
Άρα $AH = A\Delta = AE$

β) Το τετράπλευρο ΝΑΜΗ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $E\hat{H}\Delta = 90^\circ$.

γ) Έστω $E\hat{A}\Lambda = \Lambda\hat{A}H = \omega$ και $H\hat{A}K = K\hat{A}\Delta = \varphi$. Επειδή $\Lambda\hat{A}K = 90^\circ$, είναι $\hat{\omega}+\hat{\varphi} = 90^\circ$.Είναι $E\hat{A}\Delta = \hat{\omega}+\hat{\omega}+\hat{\varphi}+\hat{\varphi} = 2\hat{\omega}+2\hat{\varphi} = 2\cdot 90^\circ = 180^\circ$, άρα τα σημεία Ε,Α,Δ είναι συνευθειακά. Στο τρίγωνο ΕΗΔ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε ΜΝ=ΔΕ/2.

1738. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.

γ) $AN \perp B\Gamma$.

Λύση

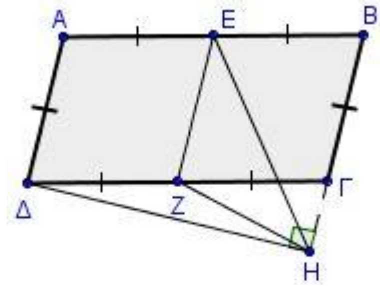
α) Είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Είναι $M\hat{N}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΔ, ΜΝ που τέμνονται από την ΒΓ και επειδή $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ είναι και $M\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Το τρίγωνο ΜΝΓ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΝΓ, είναι $MN = M\Gamma = MA = \frac{A\Gamma}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΝΓ η διάμεσός του ΝΜ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}\Gamma = 90^\circ$, δηλαδή $AN \perp B\Gamma$.

1759. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.
γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ.

Λύση

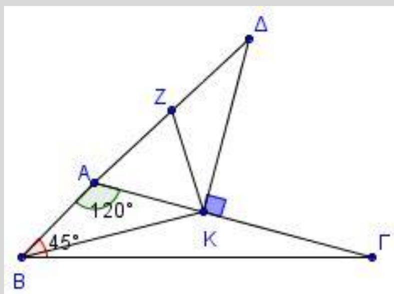


α) Είναι $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Delta Z$ και επειδή $AE \parallel \Delta Z$, το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AE = \frac{AB}{2} = A\Delta$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΑΔΖΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΓΔ το ΗΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $HZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2\Delta Z}{2} = \Delta Z \overset{A\Delta ZE\ \text{ρόμβος}}{=} EZ$, άρα το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΕΗΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΗ, ισχύει ότι $Z\hat{E}H = Z\hat{H}E$. Όμως $Z\hat{E}H = E\hat{H}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΒΗ που τέμνονται από την ΕΗ, άρα και $Z\hat{H}E = E\hat{H}\Gamma$, δηλαδή η ΕΗ διχοτομεί τη γωνία ΖΗΓ.

1761. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β ίση με 45°. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\hat{\Delta}K = 30^\circ$
β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.
γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\hat{K}B = 90^\circ$.
δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.



Λύση

α) Είναι $K\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}B = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow K\hat{A}\Delta + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow K\hat{A}\Delta = 60^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΔ ισχύει ότι: $K\hat{A}\Delta + A\hat{\Delta}K = 90^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 60^\circ + A\hat{\Delta}K = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K = 30^\circ$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΚ είναι $A\hat{\Delta}K = 30^\circ$, άρα $AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$, άρα το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

γ) $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB = AK$.Άρα Α μέσο και $AK = \frac{BZ}{2}$.
Επομένως το τρίγωνο ΒΚΖ είναι ορθογώνιο με $B\hat{K}Z = 90^\circ$

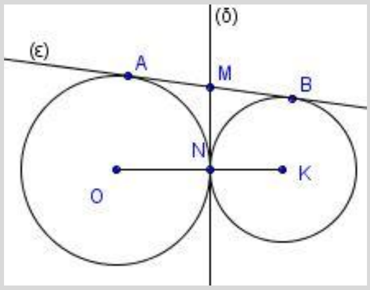
δ) Επειδή $A\hat{B}K = A\hat{\Delta}K = 30^\circ$, το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές, άρα $KB = K\Delta$. Επειδή το Κ ισαπέχει από τα Β,Δ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΔ.

1771. Δύο κύκλοι (O,ρ_1), (K,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

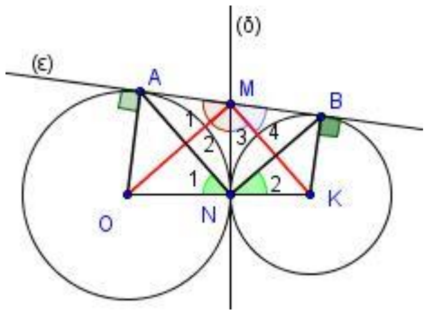
β) $O\hat{M}K = 90^\circ$

γ) $A\hat{N}B = 90^\circ$



Λύση

α) Τα ΜΑ,ΜΝ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (O,ρ_1), άρα είναι ίσα. Τα ΜΒ,ΜΝ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (K,ρ_2) ,άρα είναι ίσα. Δηλαδή $MA = MB = MN$.



β) Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΟ, άρα $AMO = OMN = \hat{\omega}$.

Η διακεντρική ευθεία ΜΚ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων ΝΜΒ, άρα $NMK = KMB = \hat{\varphi}$.

Είναι $AMB = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα

$OMK = \omega + \varphi = 90^\circ$.

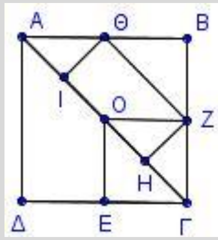
γ) $NM = \dfrac{AB}{2}$ και ΝΜ διάμεσος στο τρίγωνο ΑΝΒ. Άρα το τρίγωνο ΑΝΒ ορθογώνιο με ορθή την γωνία ΑΝΒ.

1781. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β) $ZH = \dfrac{A\Gamma}{4}$.

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $\Theta Z = 2\Theta I$.

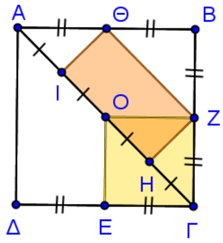


Λύση

α) Τα Ο,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα $OE \parallel A\Delta$ και $OE = \dfrac{A\Delta}{2}$.

Όμως $A\Delta =\parallel B\Gamma$, οπότε $OE \parallel Z\Gamma$ και $OE = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma Z$. Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\Gamma = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο. Είναι

$OE = E\Gamma = \Gamma Z = ZO = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$, οπότε το ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

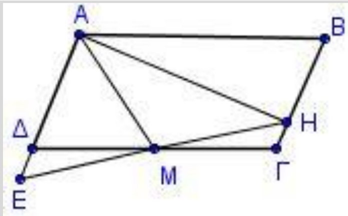


β) Η ΖΗ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ZH = \dfrac{O\Gamma}{2} = \dfrac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{A\Gamma}{4}$.

γ) Επειδή τα Θ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Theta Z \parallel A\Gamma \Leftrightarrow \Theta Z \parallel IH$ και $\Theta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

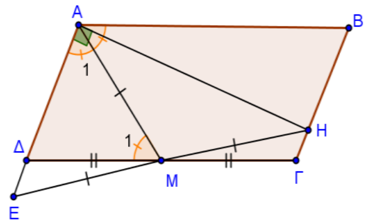
Είναι $IH = IO + OH = \frac{AO}{2} + \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \Theta Z$.
Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΖΓ, το ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $ZHO = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΙΘΖΗ έχει μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$,τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:
α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.
β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.
γ) $\hat{E} = \Delta\hat{M}A$.



Λύση

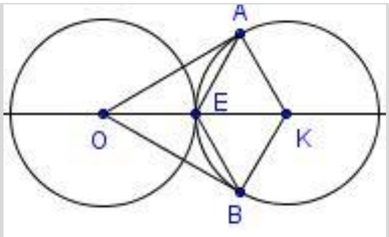
α) Είναι $BAM = M_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΜ.
Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ ισχύει ότι
$\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο ΔΑΜ είναι ισοσκελές και έχει $\Delta MA = A_1$(2).
Από τις (1),(2) είναι $BAM = A_1$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.



β) Τα τρίγωνα ΔΕΜ και ΜΗΓ έχουν:
1) $\Delta M = M\Gamma$
2) $\Delta ME = HM\Gamma$ ως κατακορυφήν και
3) $E\Delta M = \Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ.
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = MH$.
Επειδή $\Delta M = M\Gamma$ και $ME = MH$, τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = ME = MH = \frac{EH}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $E = A_1$. Όμως είναι και $\Delta MA = A_1$, άρα $E = \Delta MA$.

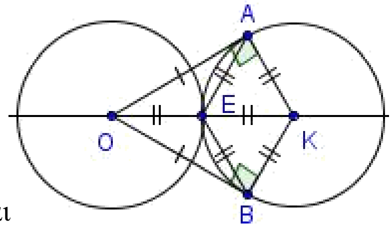
1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K,ρ), να αποδείξετε ότι:
α) $AE = BE$.
β) $A\hat{O}K = 30^\circ$.
γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΕ έχουν:
1) τη πλευρά ΟΕ κοινή
2) $OA = OB$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και

3) $AOE = EOB$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΟΚ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΒ των εφαπτομένων
Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AE = BE$.

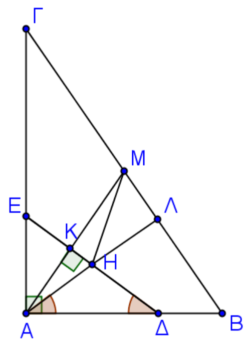


β) Επειδή η ΑΚ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την ΟΑ, θα είναι $OA \perp AK$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ είναι $AK = \rho$ και $OK = 2\rho = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{OK}{2}$, δηλαδή μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από τη πλευρά αυτή είναι 30°, δηλαδή $AOK = 30^\circ$.

γ) Το τμήμα ΑΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AE = \frac{OK}{2} = \rho$. Το τμήμα ΒΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $BE = \frac{OK}{2} = \rho$. Επειδή $AE = BE = KB = AK = \rho$, το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:
α) $B = BAM$.
β) $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$.
γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

Λύση



α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ισχύει ότι $B = BAM$.

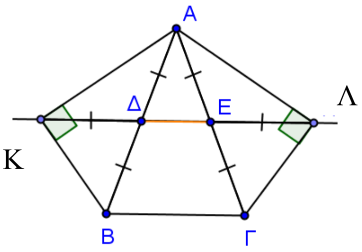
β) Το ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, άρα $AH = \frac{\Delta E}{2} = H\Delta = HE$, άρα το τρίγωνο ΑΗΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και ισχύει ότι $A\Delta H = \Delta AH$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ, έχουμε:
$BAM + A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow B + A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta H = 90^\circ - B = \Delta AH$. Στο τρίγωνο ΑΛΒ έχουμε
$\Delta AH + B = 90^\circ \cancel{-B} + \cancel{B} = 90^\circ$. Άρα και $A\Lambda B = 90^\circ$, δηλαδή $AH \perp B\Gamma$.

1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\Delta K = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
α) $K\Delta = \Lambda E$.
β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια.
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

Λύση

α) Είναι $K\Delta = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.



β) Επειδή $K\Delta = \frac{AB}{2}$, μια διάμεσος στο τρίγωνο ΑΚΒ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.

Επειδή $\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$, μια διάμεσος στο τρίγωνο ΑΚΒ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΕΛ έχουν:

1) $A\Delta = AE$
2) $K\Delta = \Lambda E$ και
3) $A\Delta K = AE\Lambda$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\Delta E$ και $AE\Delta$
(το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές)

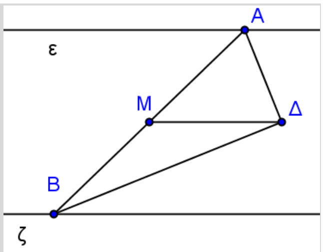
Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AK = A\Lambda$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν:
1) $AK = A\Lambda$ και
2) $AB = A\Gamma$,
δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

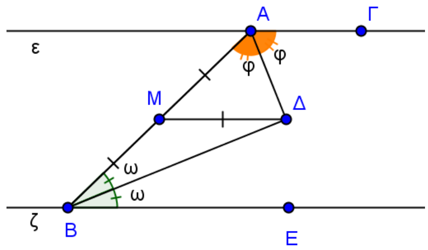
α) $B\hat{\Delta}A = 90^\circ$

β) $B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Delta}A$

γ) $M\Delta \parallel \varepsilon$



Λύση



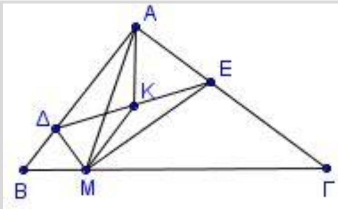
α) Έστω ΑΔ, ΒΔ οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ΓΑΜ και ΜΒΕ. Έστω $MB\Delta = \Delta BE = \omega$ και $MA\Delta = \Delta A\Gamma = \varphi$. Επειδή οι γωνίες ΓΑΜ και ΜΒΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ζ που τέμνονται από την ΑΒ, είναι παραπληρωματικές, άρα $\Gamma AM + MBE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + \omega = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ, έχουμε:
$B\Delta A + \omega + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow B\Delta A + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\Delta A = 90^\circ$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $\Delta M = \frac{AB}{2} = MA = MB$, άρα το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΑΔ είναι ίσες. Δηλαδή $MA\Delta = M\Delta A = \varphi$.

Η γωνία ΒΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΔ, οπότε: $BM\Delta = M\Delta A + MA\Delta = 2M\Delta A$

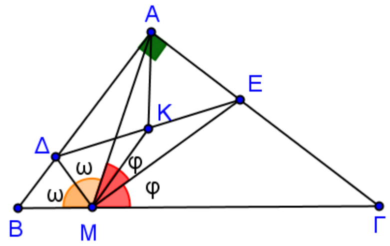
γ) Είναι $BM\Delta + MBE = 2\varphi + 2\omega = 180^\circ$.
Οι γωνίες ΒΜΔ και ΜΒΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΜΔ, (ζ) που τέμνονται από την ΜΒ και επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΜΔ και (ζ) είναι παράλληλες, άρα και $M\Delta \parallel \varepsilon$.

1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή.
β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Λύση



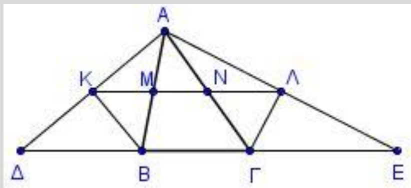
α) Επειδή η ΜΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΜΑ, είναι $BM\Delta = \Delta MA = \omega$ και επειδή η ΜΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΓ, ισχύει ότι $AME = EM\Gamma = \varphi$.
Είναι $AMB + AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow$ $\omega + \varphi = 90^\circ$. Όμως $\Delta ME = \omega + \varphi$, άρα $\Delta ME = 90^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΔΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AK = \frac{\Delta E}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΕ, η ΜΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $MK = \frac{\Delta E}{2}$.

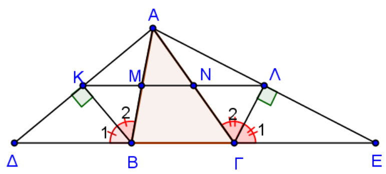
Οπότε $AK = MK = \frac{\Delta E}{2}$.

1824. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή.
γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

Λύση



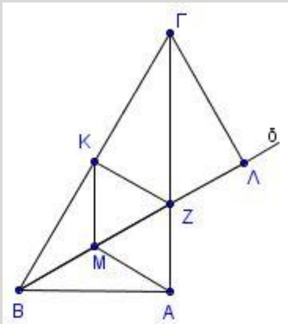
α) Επειδή $B\Delta = AB$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και το ΒΚ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το Κ είναι μέσο του ΑΔ.
Επειδή $\Gamma E = A\Gamma$, το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές και το ΓΛ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $KM = \frac{AB}{2} = MA$, άρα το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ισοσκελές. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΓ το ΛΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του,
άρα $\Lambda N = \frac{A\Gamma}{2} = NA$, άρα το τρίγωνο ΑΝΛ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η ΚΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Κ είναι μέσο της ΑΔ και η ΚΜ είναι παράλληλη στην ΒΔ, άρα το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Στο

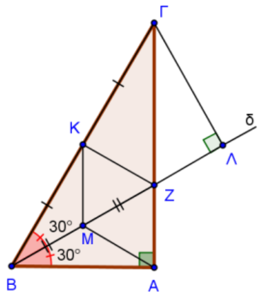
τρίγωνο ΑΓΕ το Λ είναι μέσο του ΑΕ και η ΛΝ είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ.
Άρα $\text{KM} = \frac{\text{ΔB}}{2}$ και $\text{NΛ} = \frac{\text{ΓE}}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $\text{MN} = \frac{\text{BΓ}}{2}$.
Είναι $\text{KΛ} = \text{KM} + \text{MN} + \text{NΛ} = \frac{\text{ΔB}}{2} + \frac{\text{BΓ}}{2} + \frac{\text{ΓE}}{2} = = \frac{\text{AB}}{2} + \frac{\text{BΓ}}{2} + \frac{\text{AΓ}}{2} = \frac{\text{AB} + \text{BΓ} + \text{AΓ}}{2}$.

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.
Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα.
Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.
γ) $\text{ΓZ} = 2\text{ZA}$
δ) $\text{BΛ} = \text{AΓ}$



Λύση

α) Επειδή η Βδ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, ισχύει ότι: $\text{ΓBZ} = \text{ABZ} = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\text{B} + \text{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \text{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Γ} = 30^\circ$.
Επειδή $\text{ΓBZ} = \text{Γ}$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές με $\text{BZ} = \text{ZΓ}$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα
$\text{AM} = \frac{\text{BZ}}{2} = \text{BM} = \text{MZ}$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΖ, έχουμε: $\text{ABZ} + \text{BZA} = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \text{BZA} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{BZA} = 60^\circ$ και αφού $\text{AM} = \text{MZ}$, το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισόπλευρο και $\text{AM} = \text{MZ} = \text{AZ}\,(1)$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{Γ} = 30^\circ$, άρα $\text{AB} = \frac{\text{BΓ}}{2} = \text{BK}$.
Τα τρίγωνα ΖΚΒ και ΖΑΒ έχουν:
1) $\text{AB} = \text{BK}$
2) τη πλευρά ΒΖ κοινή και
3) $\text{ΓBZ} = \text{ABZ} = 30^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $\text{BKZ} = \text{A} = 90^\circ$ και $\text{KZ} = \text{AZ}$ (2).
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΖ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα
$\text{KM} = \frac{\text{BZ}}{2} = \text{BM} = \text{MZ}$ (3).
Από τις (1),(2),(3) το τετράπλευρο ΑΜΚΖ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Είναι $\text{AZ} = \text{MZ} = \frac{\text{BZ}}{2}$ και $\text{BZ} = \text{ZΓ}$, άρα $\text{AZ} = \frac{\text{ΓZ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΓZ} = 2\text{AZ}$.

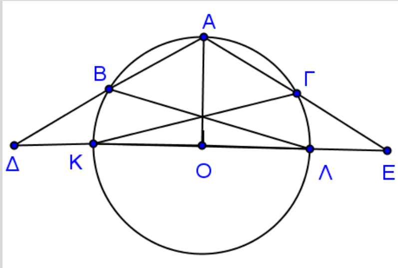
δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΑ και ΓΖΛ έχουν:
1) $\text{BZ} = \text{ZΓ}$ και
2) $\text{ΓZΛ} = \text{BZA}$ ως κατακορυφήν,
δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{ZΛ} = \text{ZA}$.
Είναι $\text{BZ} = \text{ZΓ}$ και $\text{ZΛ} = \text{ZA}$, άρα και $\text{BZ} + \text{ZΛ} = \text{ΓZ} + \text{ZA} \Leftrightarrow \text{BΛ} = \text{AΓ}$

1874. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο $ΚΛ = 2ρ$. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $ΑΒ = ΑΓ = ρ$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:

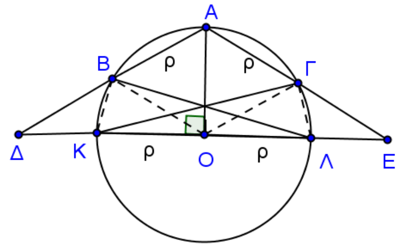
α) $Β\hat{Α}Γ = 120^\circ$

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ) $ΚΓ = ΛΒ$



Λύση



α) Είναι $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΑΒ = ΑΓ = ρ$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ισόπλευρα, άρα $ΒΑΟ = ΓΑΟ = 60^\circ$. Άρα

$ΒΑΓ = ΒΑΟ + ΓΑΟ = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

β) Στο τρίγωνο ΔΟΑ είναι $Δ + ΒΑΟ = 90^\circ \Leftrightarrow Δ = 30^\circ$. Τότε

$ΟΑ = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = 2ρ$ και επειδή $ΑΒ = ρ$ είναι και $ΒΔ = ρ$, άρα το Β είναι μέσο της ΑΔ. Όμοια $Ε = 30^\circ$, άρα $ΟΑ = \frac{ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = 2ρ$, και αφού $ΑΓ = ρ$, το Γ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι $ΑΟΒ = ΑΟΓ = 60^\circ$ άρα $(ΑΒ) = (ΑΓ) = 60^\circ$. Επειδή $(ΑΚ) = (ΑΛ) = 90^\circ$, θα είναι $(ΒΚ) = (ΓΛ) = 30^\circ$.

Είναι $ΚΑΓ = ΚΒ + ΒΑΓ = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$ και όμοια $ΛΑΒ = 150^\circ$,

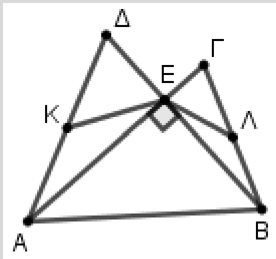
δηλαδή $ΛΑΒ = ΚΑΓ$ και επειδή σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές, είναι και $ΚΓ = ΛΒ$.

1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ .

β) ΔΓ//ΑΒ .

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ.



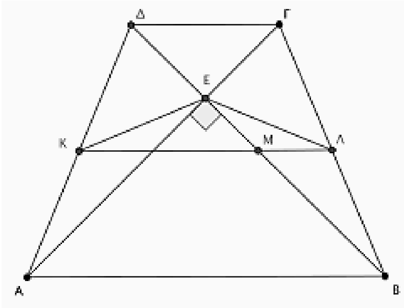
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα, έχουν και $ΕΑΒ = ΕΒΑ$ (απέναντι από ίσες πλευρές). Άρα το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές οπότε ΕΑ = ΕΒ. όμως ΒΔ=ΑΓ, οπότε και
$ΒΔ - ΒΕ = ΑΓ - ΑΕ \Leftrightarrow ΕΔ = ΕΓ$.

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΓΕ = ΔΕ, οπότε: $Γ\hat{Δ}Ε = 45^o$. Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΕΑ = ΕΒ, οπότε: $Α\hat{Β}Δ = 45^o$. Άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ οι οποίες τέμνονται από την ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ΓΔΕ και ΑΒΔ ίσες, οπότε ΔΓ // ΑΒ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΑ η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΔ, οπότε: ΕΚ =ΑΔ/2.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ η ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε: ΕΛ =ΒΓ/2. Όμως ΑΔ = ΒΓ, άρα ΕΚ = ΕΛ, οπότε το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές. Στο τρίγωνο ΑΔΒ φέρουμε από το μέσο Κ του ΑΔ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει την ΔΒ στο μέσο της Μ. Το τμήμα ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΔΒ και ΒΓ του τριγώνου ΔΓΒ οπότε ΜΛ // ΔΓ, άρα και ΜΛ // ΑΒ και επειδή από το Μ διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ΑΒ προκύπτει ότι τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά. Επομένως ΚΛ // ΑΒ.



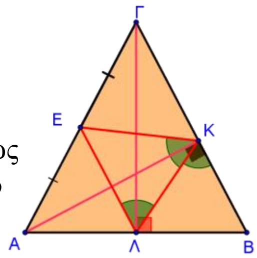
1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ η ΚΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΚΕ=\frac{ΑΓ}{2}$

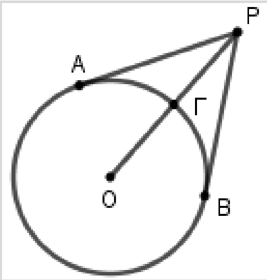
.Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΓΛΑ: $ΛΕ=\frac{ΓΑ}{2}$.Επομένως ΚΕ=ΛΕ και το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές .



β) Στο τρίγωνο ΓΑΒ τα Ε,Λ είναι μέσα οπότε $ΛΕ//ΓΒ$ και $Ε\hat{Λ}Κ=Λ\hat{Κ}Β$ (1) (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΛ και ΒΓ που τέμνονται από την ΚΛ). Από το α) ερώτημα $Ε\hat{Λ}Κ=Ε\hat{Κ}Λ$ (2) (τρίγωνο ΕΚΛ ισοσκελές). Από (1),(2) $Ε\hat{Κ}Λ=Λ\hat{Κ}Β$.Επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Κ}Ε$.

13520.Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου.
Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ.
Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $ΑΡΒ=60^\circ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΟΡ = 2ρ.
β) $Α\hat{Γ}Β=120^\circ$
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

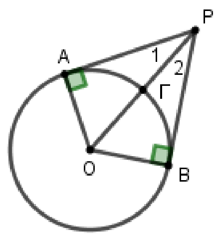


Λύση

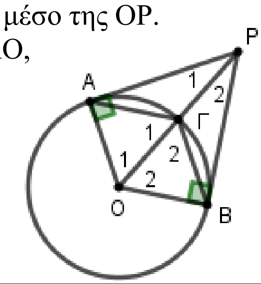
α) Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΡΒ, οπότε

$Ρ_1=Ρ_2=30^\circ$.Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΟ είναι $Ρ_1=30^\circ$, οπότε

$ΟΑ=\frac{ΟΡ}{2}\Leftrightarrow 2ΟΑ=ΟΡ\Leftrightarrow ΟΡ=2ρ$



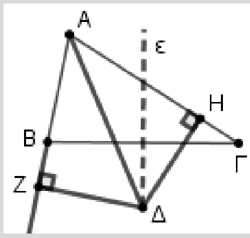
β) Επειδή η ΟΓ είναι ακτίνα του κύκλου είναι ΟΓ=ρ. Όμως ΡΟ= 2ρ, άρα το Γ είναι μέσο της ΟΡ. Η ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΟ, οπότε $ΑΓ=\frac{ΡΟ}{2}=\frac{2ρ}{2}=ρ$. Όμοια στο τρίγωνο ΡΒΟ η ΒΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $ΒΓ=\frac{ΡΟ}{2}=\frac{2ρ}{2}=ρ$. Επειδή ΟΑ=ΑΓ=ΟΓ=ρ, το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Γ_1=60^\circ$.



Επειδή ΟΒ=ΒΓ=ΟΓ=ρ, το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Γ_2 = 60^\circ$.
Είναι $ΑΓΒ = Γ_1 + Γ_2 = 120^\circ$.

γ) Επειδή ΟΑ=ΑΓ=ΓΒ=ΟΒ=ρ το τετράπλευρο ΟΑΓΒ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

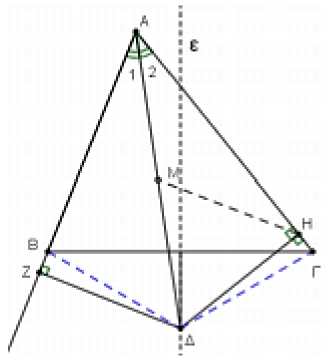
13522.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ.
β) Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΗΓ.
γ) Αν η γωνία $\hat{Α} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΗΜ = ΖΔ.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΔΗ έχουν:
- την πλευρά ΑΔ κοινή
- $ΒΑΔ = ΔΑΓ$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.



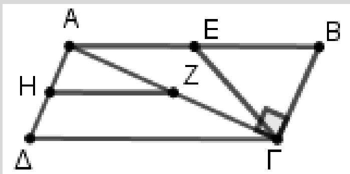
β) Φέρνουμε τις ΔΒ, ΔΓ. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΒΓ θα ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα ΒΔ = ΓΔ (1).
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΔ έχουν:
- ΒΔ = ΓΔ, από (1).
- ΔΖ = ΗΔ (2), επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΖΔ και ΑΗΔ, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Α_1, Α_2$ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα, ΖΒ = ΗΓ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ η ΗΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε $ΗΜ = \frac{ΑΔ}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ είναι $Α_1 = \frac{Α}{2} = 30^\circ$, οπότε $ΔΖ = \frac{ΑΔ}{2}\ (3)$.
Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι ΗΜ = ΔΖ.

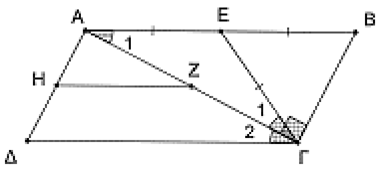
13540.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΓΕ = ΖΗ
ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΔΓΕ$.
β) Αν $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ η ΓΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε $ΓΕ = \frac{ΑΒ}{2}\ (1)$. Στο τρίγωνο ΑΔΓ τα Η, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $ΗΖ = \frac{ΓΔ}{2}\ (2)$. Επειδή οι ΑΒ, ΓΔ είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, είναι ίσες, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι ΓΕ = ΖΗ.

ii. Είναι $\text{ΓΕ} = \text{ΑΕ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και $\text{Α}_1 = \text{Γ}_1$ (3) γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.



Είναι $\text{Α}_1 = \text{Γ}_2$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\text{Γ}_1 = \text{Γ}_2$, οπότε η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΕ.

β) Επειδή το Η είναι μέσο της ΑΔ, είναι $\text{ΑΔ} = 2\text{ΔΗ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$.

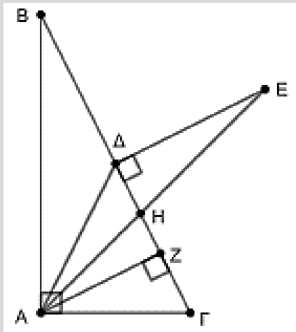
Είναι $\text{ΓΕ} = \text{ΕΒ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$, οπότε $\text{ΓΕ} = \text{ΕΒ} = \text{ΒΓ}$, αφού $\text{ΒΓ} = \text{ΑΔ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$, άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

13672.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$ και ΑΒ > ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας Α στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{Γ}\hat{\text{Α}}\text{Ζ} = \text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Β}$.

β) ΑΔ = ΔΕ.

γ) $\text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \hat{\text{Γ}} - \hat{\text{Β}}$



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε ΑΔ = ΔΒ = ΔΓ. Οι οξείες γωνίες Β και Γ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\text{Β} = 90^\circ - \text{Γ}$ (1) Οι οξείες γωνίες ΓΑΖ και Γ του ορθογωνίου τριγώνου ΖΑΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\text{ΓΑΖ} = 90^\circ - \text{Γ}$ (2**)** **.** Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\text{ΓΑΖ} = \text{Β}$. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΒ, οπότε θα είναι $\text{ΔΑΒ} = \text{Β}$. Επομένως, οι γωνίες ΓΑΖ και ΔΑΒ θα είναι ίσες, δηλαδή $\text{ΓΑΖ} = \text{ΔΑΒ}$ (3).

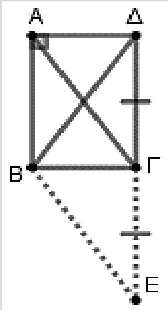
β) Η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε $\text{ΓΑΗ} = \text{ΗΑΒ}$ (4).
Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:
$\text{ΓΑΗ} - \text{ΓΑΖ} = \text{ΗΑΒ} - \text{ΔΑΒ} \Leftrightarrow \text{ΖΑΗ} = \text{ΗΑΔ}$ (5).

Επίσης, ΑΖ//ΔΕ διότι είναι κάθετες στη ΒΓ. Άρα, $\text{ΖΑΗ} = \text{Ε}$ (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΖ και ΔΕ τεμνόμενων από την ΑΕ.

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $\text{ΗΑΔ} = \text{Ε}$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ άρα ΔΕ = ΑΔ.

γ) Είναι $\text{ΓΑΖ} + \text{ΖΑΔ} + \text{ΔΑΒ} = \text{Α}$, οπότε $\text{ΖΑΔ} = \text{Α} - \text{ΓΑΖ} - \text{ΔΑΒ} = 90^\circ - \text{Β} - \text{Β} = \text{Γ} - \text{Β}$, αφού είναι $\text{ΓΑΖ} = \text{ΔΑΒ} = \text{Β}$ και $\text{Γ} = 90^\circ - \text{Β}$.

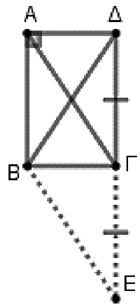
13851.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) Αν $\Delta\hat{B}E = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι ΒΔ=2ΑΔ.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες δηλαδή ΑΒ=ΓΔ, επιπλέον από υπόθεση έχουμε ότι ΓΔ=ΓΕ, άρα ΑΒ=ΓΕ.

Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΒ//ΓΔ άρα και ΑΒ//ΓΕ.
Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.



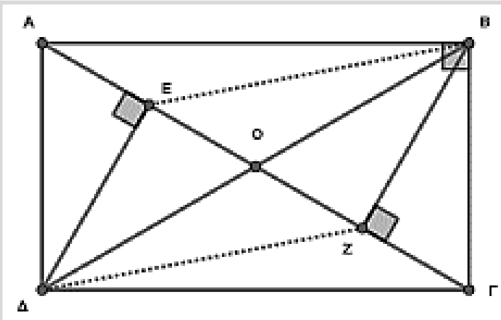
β) Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε ΑΓ=ΒΕ ως απέναντι πλευρές επίσης στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΓ=ΒΔ ως διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα ΒΕ=ΒΔ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
ή
Στο τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος , διάμεσος άρα διχοτόμος του τριγώνου οπότε

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\Delta\hat{B}E}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ .$$

Επίσης $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΑΔ,ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ . Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\Delta\hat{B}A = 30^\circ$ οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας άρα $A\Delta = \frac{B\Delta}{2}$ ή ΒΔ=2ΑΒ.

13852.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Αν $\Delta\hat{A}E = 60^\circ$ και ΟΕ=5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

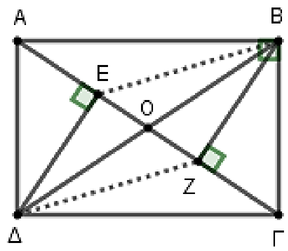


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ έχουν:

- $E O \Delta = Z O B$ ως κατακορυφήν
- ΔΟ=ΟΒ , Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



β) Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $O\Delta E$ και OBZ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $E O \Delta$ και $Z O B$.

Από τη σύγκριση του α) ερωτήματος έχουμε ΕΟ=ΖΟ ως πλευρές των ίσων τριγώνων απέναντι από τις ίσες γωνίες $ΟΔΕ$ και $ΟΒΖ$. Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο αφού ΕΟ=ΟΖ και ΔΟ=ΟΒ (Ο μέσο της ΒΔ).

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $ΔΑΓ = 60^\circ$ συνεπώς $ΔΓΑ = 30^\circ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και $ΓΟ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = ΔΟ$ δηλαδή το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ και $ΔΓΑ = 30^\circ$, άρα $ΔΟΓ = 120^\circ$ και $ΔΟΑ = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της $ΔΟΓ$.
Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΟ με ΑΕ=ΕΟ=5.

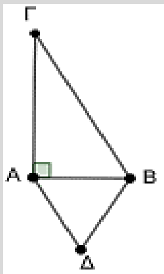
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $ΔΑΕ = 60^\circ$ συνεπώς $ΑΔΕ = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΕ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή $ΑΕ = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{ΑΔ}{2} \Leftrightarrow ΑΔ = 10$.

13853. Στο παράπανω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^\circ$.
Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ.
Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

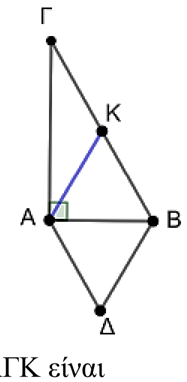


Λύση

α) Οι γωνίες $ΔΑΒ$ και $ΑΒΓ$ είναι εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ. Επομένως $ΔΑΒ = ΑΒΓ$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως η καθεμία από τις γωνίες του είναι 60^o. Δηλαδή $ΔΑΒ = ΑΒΓ = 60^\circ$. Όμως οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓΒ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

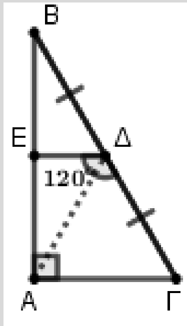
β) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα έχει ίσες πλευρές. Επομένως το μήκος κάθε πλευράς του είναι ΑΒ=ΑΔ=ΒΔ= 12: 3 = 4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $Γ = ΑΓΒ = 30^\circ$, επομένως η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 8$.

γ) Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες (ιδιότητα παραλληλογράμμου).
Επίσης $ΑΔ = ΔΒ$ οπότε είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
Άρα ΒΚ = ΑΚ. Είναι $ΑΒΓ = 60^\circ$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισόπλευρο άρα ΒΚ=ΑΚ=ΑΒ.
Η γωνία $Γ\hat{Κ}Α$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $Α\hat{Κ}Β$ οπότε είναι
$Γ\hat{Κ}Α = 180^\circ - Α\hat{Κ}Β = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΑΓΚ έχουμε
$Γ\hat{Α}Κ + Γ\hat{Κ}Α + Α\hat{Γ}Κ = 180^\circ \Leftrightarrow Γ\hat{Α}Κ + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Γ\hat{Α}Κ = 30^\circ$ οπότε το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές και $ΑΚ = ΚΓ$. Επομένως $ΒΚ = ΚΓ$ άρα το Κ είναι μέσο του ΒΓ.



13855.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $E\hat{\Delta}\Gamma=120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}A$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.
γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΓ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{H}Z=90^\circ$.



Λύση

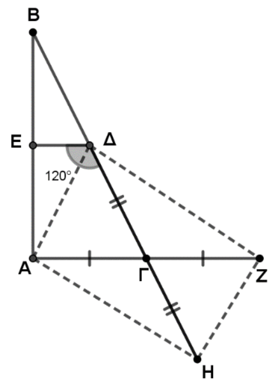
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΔΕ// ΑΓ άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Οι γωνίες ΕΔΓ και ΔΓΑ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΕΔ και ΑΓ που τέμνονται από την ΓΔ, συνεπώς είναι παραπληρωματικές άρα

$E\Delta\Gamma+\Delta\Gamma A=180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ+\Delta\Gamma A=180^\circ \Leftrightarrow \Delta\Gamma A=60^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A\Delta=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow A\Delta=\Delta\Gamma$. Στο ίδιο τρίγωνο οι γωνίες Β και Γ είναι συμπληρωματικές, από το α) ερώτημα έχουμε $\Gamma=60^\circ$ άρα $B=30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $B=30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow A\Gamma=\Delta\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο αφού έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες ΑΔ=ΑΓ=ΔΓ.
ή

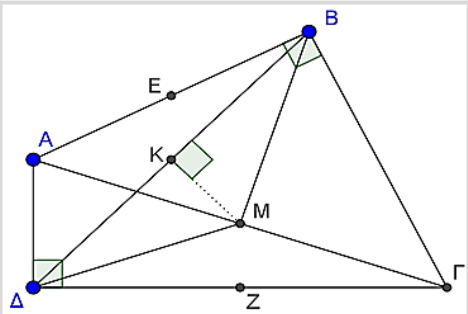
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A\Delta=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow A\Delta=\Delta\Gamma$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με γωνία $\Delta\Gamma A=60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.



γ) Από την κατασκευή των ΓΖ,ΓΗ το Γ είναι μέσο των ΔΗ,ΑΖ ,οι οποίες είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΔΖΗ. Επομένως το ΑΔΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης $AZ=2A\Gamma=2\Delta\Gamma=\Delta H$ οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΖΔΗ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγώνιες.
Άρα $AHZ=90^\circ$.

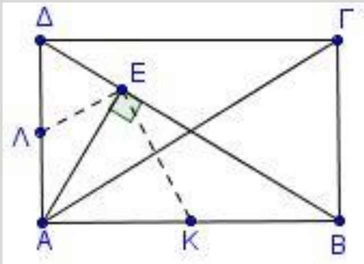
14566.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{\Delta}=B=90^0$.
Αν τα σημεία Ε, Ζ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, και ΑΓ αντιστοίχως και το ΜΚ είναι κάθετο στην ΒΔ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισοσκελές και το Κ είναι το μέσο του ΒΔ.
β) i. $EK=\frac{A\Delta}{2}$.
ii. ΜΖ=ΕΚ.
γ) Το τετράπλευρο ΚΕΜΖ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.
Από την κορυφή Α φέρουμε $ΑΕ \perp ΒΔ$.
Έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:
α) i. Να αποδείξετε ότι: $Κ\hat{Ε}Λ = 90^\circ$
ii. $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$
β) Αν $Β\hat{Α}Γ = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $ΚΛ = ΒΓ$.



Λύση

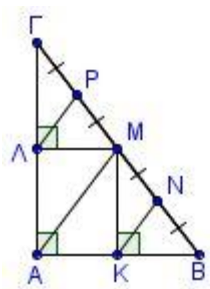
α) i. Το ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΔ, οπότε
$ΕΛ = ΛΑ = \frac{ΑΔ}{2}$.
Τότε το τρίγωνο ΛΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $ΛΕΑ = ΛΑΕ$ (1). Το ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΒ, οπότε $ΕΚ = ΚΑ = \frac{ΑΒ}{2}$. Τότε το τρίγωνο ΚΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $ΚΕΑ = ΚΑΕ$ (2).
Είναι $ΚΕΛ = ΛΕΑ + ΚΕΑ = ΛΑΕ + ΚΑΕ = ΛΑΚ = 90^\circ$

ii. Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, ισχύει ότι $ΚΛ = \frac{ΒΔ}{2}$. Όμως $ΒΔ = ΑΓ$ γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΒΓΔ
είναι ίσες, άρα $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β) Αν $ΒΑΓ = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = ΚΛ$

14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $Ν\hat{Κ}Μ = Ν\hat{Μ}Κ$.
β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.
γ) $ΑΜ = ΚΝ + ΛΡ$.

Λύση

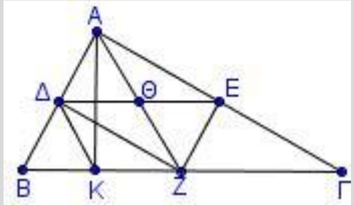


α) Το ΚΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΜΚΒ, οπότε $ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2} = ΜΝ = ΝΒ$, άρα το τρίγωνο ΚΝΜ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΜΚ είναι ίσες. Δηλαδή $ΝΚΜ = ΝΜΚ$.

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ = ΜΓ$
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ, η ΜΚ είναι ύψος, οπότε είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.

γ) Είναι $ΚΝ + ΛΡ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} \overset{ΑΜ=ΜΒ=ΜΓ}{=} \frac{ΑΜ}{2} + \frac{ΑΜ}{2} = ΑΜ$

14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ.



Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$

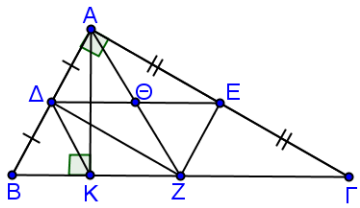
β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ.

ii. να αποδείξετε ότι $BK=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

Λύση

α) i. Επειδή τα Ε,Ζ είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι $EZ\parallel AB \Leftrightarrow EZ\parallel A\Delta$ και $EZ=\dfrac{AB}{2}=A\Delta$. Στο τετράπλευρο ΑΔΖΕ δύο απέναντι πλευρές του, οι ΑΔ, ΕΖ είναι ίσες και παράλληλες και μια γωνία του, η Α, είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



ii. Τα Δ,Ε είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta E\parallel B\Gamma$ και $\Delta E=\dfrac{B\Gamma}{2}$. Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα $A\Theta=\Theta E=\dfrac{\Delta E}{2}=\dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

β) i.Επειδή $ZE\Gamma=90^\circ$, το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $ZA\Gamma=\Gamma=30^\circ$.

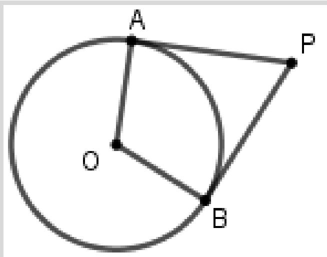
Η γωνία ΑΖΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα $AZB=ZA\Gamma+\Gamma=60^\circ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma=30^\circ$, άρα $AB=\dfrac{B\Gamma}{2}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $B+\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow B=60^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ έχουμε:

$BAK+B=90^\circ \Leftrightarrow BAK=30^\circ$. Τότε $BK=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\dfrac{B\Gamma}{4}$

34315.Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο Ρ. Έστω ΡΑ, ΡΒ τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το Ρ, τα σημεία επαφής τους Α, Β με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $A\hat{P}B$ να ισούται με 60^0.



α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}B$ είναι ίσο με 120^0.

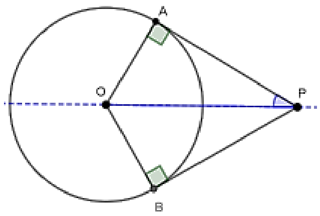
β) Αν ΡΟ η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνίας $A\hat{P}O$ **ii.** το μήκος του τμήματος ΟΡ.

Λύση

α) Οι ΟΑ, ΟΒ είναι ακτίνες του κύκλου και Α,Β σημεία επαφής, άρα $OA\perp PA$ και $OB\perp PB$.

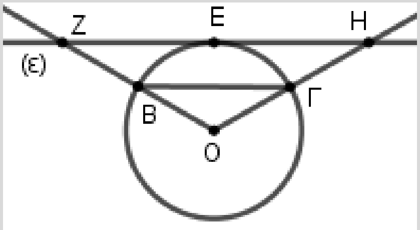
Στο τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι $\mathrm{A\hat{O}B}+\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\mathrm{A\hat{P}B}=360^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{O}B}+90^\circ+90^\circ+60^\circ=360^\circ \Leftrightarrow$
$\mathrm{A\hat{O}B}=360^\circ-240^\circ=120^\circ$.



β) i. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{P}B}$ των εφαπτομένων, άρα $\mathrm{A\hat{P}O}=\dfrac{60^\circ}{2}=30^\circ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\mathrm{A\hat{P}O}=30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\mathrm{OA}=\dfrac{\mathrm{PO}}{2}\Leftrightarrow \rho=\dfrac{\mathrm{PO}}{2}\Leftrightarrow \mathrm{PO}=2\rho$.

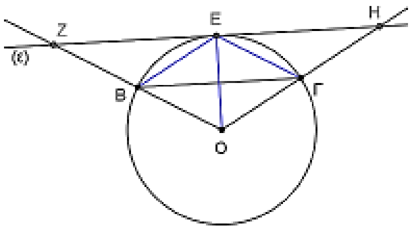
34318.Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και Ε το μέσο του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο Ε.
Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ (προς το Β και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΒΓ // (ε).
ii. ΟΖ = ΟΗ.
β) Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΖ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

Λύση

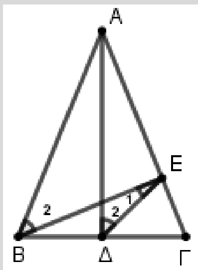
α) i. Η ΟΕ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Ε, άρα $\mathrm{OE}\perp\mathrm{ZH}$ (1).
Επειδή το Ε είναι το μέσο του τόξου ΒΓ, οι επίκεντρες γωνίες $\mathrm{B\hat{O}E}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}$ είναι ίσες. Η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή
$\mathrm{OE}\perp\mathrm{B\Gamma}$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΖΗ//ΒΓ.



ii. Η ΟΕ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο ΟΖΗ, άρα είναι ισοσκελές με ΟΖ = ΟΗ.

β) Στο τρίγωνο ΖΟΗ το Β είναι μέσο της ΟΖ και ΒΓ//ΖΗ, άρα Γ μέσο της ΟΗ. Τα Β, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΖΟΗ, άρα ΒΕ//ΟΗ και $\mathrm{BE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OH}=\mathrm{O\Gamma}=\rho$. Επειδή ΟΒ=ΒΕ=ΟΕ = ρ, το τρίγωνο ΟΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{B\hat{O}E}=60^\circ$. Τότε $\mathrm{B\hat{O}\Gamma}=2\cdot60^\circ=120^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ έχουμε:
$\mathrm{B\hat{O}E}+90^\circ+\hat{\mathrm{Z}}=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+90^\circ+\hat{\mathrm{Z}}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{Z}}=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.
Στο τρίγωνο ΟΖΗ η ΟΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές με $\hat{\mathrm{H}}=\hat{\mathrm{Z}}=30^\circ$.

34321.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΒΓ = 2ΕΔ
β) $\hat{\mathrm{E}}_1=\dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$
γ) $\hat{\mathrm{B}}_2=\hat{\Delta}_2$

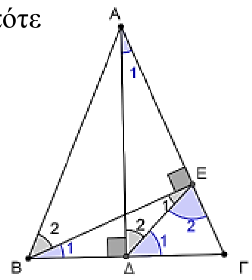


Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα

$E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$.

β) Είναι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΒ, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:



$\hat{B}_1 + \hat{\Gamma} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma}$.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}$, οπότε

$\hat{B}_1 = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{A}$, οπότε και $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΕ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 2\hat{E}_1$.

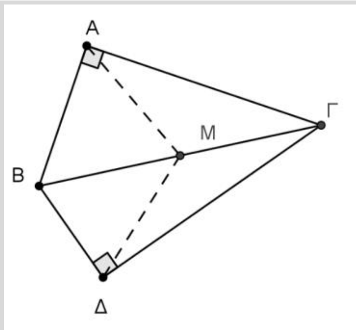
Είναι $\hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - 2\hat{E}_1 = 90^\circ - 2 \cdot \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \hat{A}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΑ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$\hat{B}_2 + \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{A}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$.

34330.Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και ΔΒΓ $\left(\hat{\Delta} = 90^\circ\right)$ με τις κορυφές τους Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές,

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) τα Α, Β, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι
ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$. Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα

$A\hat{M}B = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A = 2M\hat{\Gamma}A$ (3).

Είναι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΓ, άρα $M\hat{\Delta}\Gamma = M\hat{\Gamma}\Delta$. Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΜΓ, άρα $B\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma + M\hat{\Gamma}\Delta =$ (4).

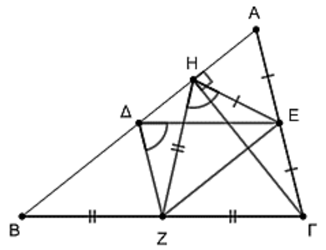
Είναι $A\hat{M}\Delta = A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta \underset{(4)}{\overset{(3)}{=}} 2M\hat{\Gamma}A + 2M\hat{\Gamma}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) Είναι ΜΑ=ΜΒ=ΜΔ=ΜΓ $= \frac{ΒΓ}{2}$, οπότε ο κύκλος με κέντρο το Μ διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Δ και Γ.

34334. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Β} < \hat{Γ}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΗΕ=ΕΓ και ΗΖ= ΖΓ.
β) το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $Ζ\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Η}Ε$.
δ) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ το ΗΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα $ΗΕ = \frac{1}{2}ΑΓ = ΕΓ = ΑΕ$.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ το ΗΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα $ΗΖ = \frac{1}{2}ΒΓ = ΒΖ = ΖΓ$.

β) Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΔΕ//ΒΓ και $ΔΕ = \frac{1}{2}ΒΓ = ΖΓ$. Επειδή ΔΕ=//ΖΓ το τετράπλευρο ΔΕΓΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

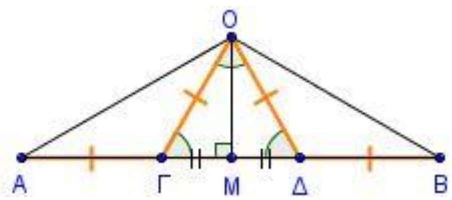
γ) Επειδή το ΔΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, άρα $Ζ\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Γ}Ε$. Επειδή ΗΖ=ΖΓ το τρίγωνο ΖΗΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΗΓ, οπότε $Ζ\hat{Η}Γ = Ζ\hat{Γ}Η$ (1). Επειδή ΕΗ=ΕΓ το τρίγωνο ΗΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΗΓ, άρα $Γ\hat{Η}Ε = Ε\hat{Γ}Η$ (2).

Είναι $Ζ\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Γ}Ε = Ζ\hat{Γ}Η + Ε\hat{Γ}Η \overset{(1),(2)}{=} Ζ\hat{Η}Γ + Γ\hat{Η}Ε = Ζ\hat{Η}Ε$.

37075. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $ΟΓ = ΑΓ$ και $ΔΒ = ΟΔ$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $Γ\hat{Ο}Δ = 60^\circ$
ii. $Ο\hat{Α}Γ = Ο\hat{Β}Δ = 30^\circ$
β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2ΟΜ = ΟΑ$.

Λύση

α) i. Είναι $ΑΓ = ΟΓ = ΓΔ = ΔΒ = ΟΔ$, οπότε το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60°. Άρα $ΓΟΔ = 60^\circ$.



ii. Επειδή $ΟΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές και έχει $ΟΑΓ = ΑΟΓ$.

Η γωνία $ΟΓΔ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ , άρα

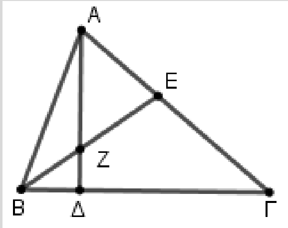
$$ΟΓΔ = ΟΑΓ + ΑΟΓ \Leftrightarrow 60^\circ = ΟΑΓ + ΑΟΓ \Leftrightarrow 60^\circ = 2ΟΑΓ \Leftrightarrow ΟΑΓ = 30^\circ$$

Όμοια : Η γωνία $\mathrm{O\Delta B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ , άρα

$$\mathrm{O\Delta B = BO\Delta + \Delta BO \Leftrightarrow 60^\circ = BO\Delta + \Delta BO \Leftrightarrow 60^\circ = 2\Delta BO \Leftrightarrow \Delta BO = 30^\circ}$$

β) Επειδή $\mathrm{OA\Gamma = OB\Delta = 30^\circ}$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και η διάμεσός του ΟΜ είναι και ύψος του. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ, είναι $\mathrm{OAM = 30^\circ}$, άρα $\mathrm{OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA}$.

37082. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.



α) Να αποδείξετε ότι:

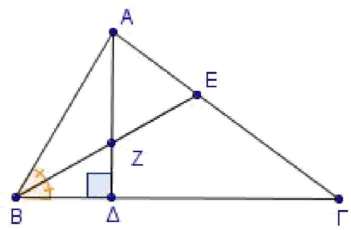
i. $\hat{\mathrm{B}} = 60^\circ$ και $\mathrm{AZ = BZ}$

ii. $\mathrm{A\Delta = \frac{3}{2}BZ}$

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:



$$\mathrm{A + B + \Gamma = 180^\circ \overset{A+\Gamma=2B}{\Rightarrow} 2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\mathrm{B + BA\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow BA\Delta = 30^\circ}$.

Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, ισχύει ότι: $\mathrm{ABE = \frac{B}{2} = 30^\circ}$.

Επειδή $\mathrm{ABE = BA\Delta = 30^\circ}$, το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{AZ = AB}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $\mathrm{ZB\Delta = 30^\circ}$, άρα $\mathrm{Z\Delta = \frac{1}{2}BZ}$.

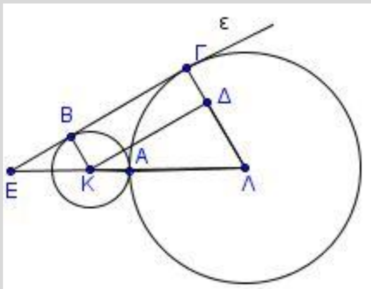
Είναι $\mathrm{A\Delta = AZ + Z\Delta = BZ + \frac{1}{2}BZ = \frac{3}{2}BZ}$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, τότε $\mathrm{\Delta A\Gamma = 60^\circ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\mathrm{\Delta A\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ}$. $\mathrm{B = 60^\circ}$ από α) i), τότε

$$\mathrm{BA\Gamma + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 90^\circ}.$$

37088. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



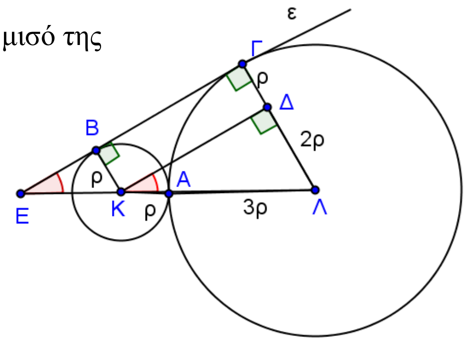
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{\Delta\hat{K}\Lambda = 30^\circ}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E\Lambda = 6\rho}$.

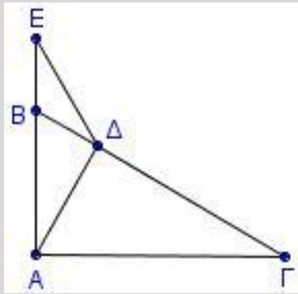
Λύση

α) Επειδή τα ΚΒ,ΓΔ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής με την ε, ισχύει ότι $\mathrm{KB \perp \varepsilon}$ και . Επειδή $\mathrm{K\Delta \parallel \varepsilon}$ θα είναι και $\mathrm{KB \perp K\Delta,\ \Gamma\Delta \perp K\Delta}$. Το τετράπλευρο ΒΓΔΚ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο.



β) Είναι $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$ και
$K\Lambda = KA + A\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ η κάθετη πλευρά ΔΛ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΚΛ, άρα η
απέναντι γωνία, δηλαδή η $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι ίση με 30°.

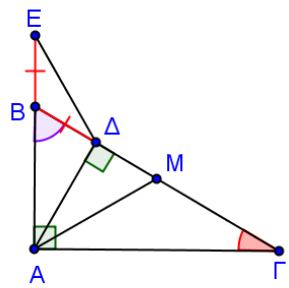
γ) Είναι $\hat{E} = \Delta\hat{K}\Lambda = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΔ και ΕΓ που τέμνονται από την ΕΛ , οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΛ ισχύει ότι:
$\Gamma\Lambda = \dfrac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 2\Gamma\Lambda = 2 \cdot 3\rho = 6\rho$



37100. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. $BE = \dfrac{AB}{2}$
ii. $AE = \Gamma\Delta$

Λύση

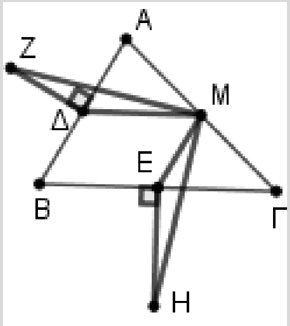
α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:
$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$ και $B = 60^\circ$.
Είναι $EB\Delta = 180^\circ - B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΕ έχουμε:
$EB\Delta + E + E\Delta B = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2E = 180^\circ \Leftrightarrow E = 30^\circ = E\Delta B$



β)i. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε: $BA\Delta + B = 90^\circ \Leftrightarrow BA\Delta + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BA\Delta = 30^\circ$, οπότε στο
τρίγωνο αυτό ισχύει ότι: $B\Delta = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow BE = \dfrac{AB}{2}$.

ii. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Επειδή η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = MB$. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ έχει $B = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο και $AB = BM = M\Gamma$. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ το ΑΔ είναι ύψος άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $B\Delta = \Delta M$. Είναι $AE = AB + BE = M\Gamma + B\Delta = M\Gamma + M\Delta = \Gamma\Delta$.

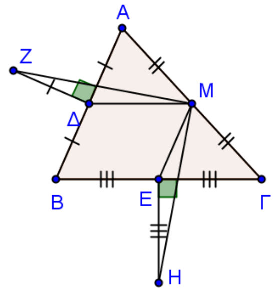
37101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με τις γωνίες Β και Γ οξείες και Δ,Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.



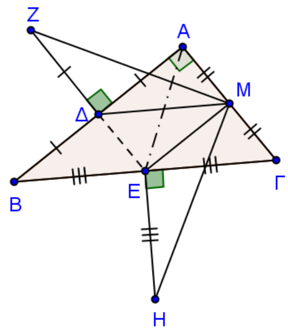
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.
β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

Λύση

α) i. Επειδή τα σημεία Δ και Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι
$\Delta M \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta M \parallel BE$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = BE$.
Στο τετράπλευρο ΒΔΜΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

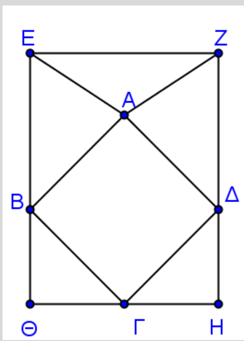


ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν:
1) $Z\Delta = \frac{AB}{2} = B\Delta = ME$ γιατί τα ΒΔ και ΜΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
2) $M\Delta = BE = \frac{B\Gamma}{2} = EH$ γιατί τα ΜΔ, ΒΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
3) $MEH = Z\Delta M$ γιατί $MEH = 90^\circ + ME\Gamma$, $Z\Delta M = 90^\circ + A\Delta M$,
$ME\Gamma = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΕ και
$A\Delta M = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή η ΖΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, αν τα Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, τότε το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ οπότε ισαπέχει από τα Α και Β. Δηλαδή $EA = EB$. Όμως $EB = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα
και $AE = \frac{B\Gamma}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ μια διάμεσός του, η ΑΕ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.

37126. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή $A \to B \to \Gamma \to \Delta \to A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45°.

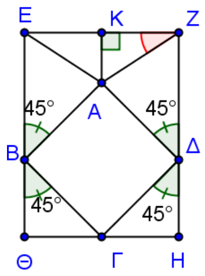


α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα.
ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.
β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα γιατί έχουν:
1) ΕΑ =ΑΖ (Α σημείο της μεσοκαθέτου του ΕΖ)
2) $A\hat{E}B = A\hat{Z}\Delta$ γιατί $E = Z = 90^\circ$ και $AEZ = AZE$ αφού το ΑΖΕ τρίγωνο είναι ισοσκελές.
3) $E\hat{A}B = Z\hat{A}\Delta$ γιατί τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες τους γωνίες θα είναι ίσες.
Λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα.

ii. Επειδή οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45°, ισχύει ότι
$AB E = \Theta B\Gamma = B\Gamma\Theta = \Delta\Gamma H = H\Delta\Gamma = A\Delta Z = 45^\circ$, άρα
$AB\Gamma = B\Gamma\Delta = \Gamma\Delta A = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα, είναι και $AB = A\Delta$.
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

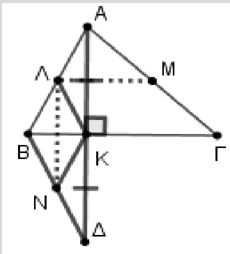


β) Έστω ΑΚ η απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ. Είναι $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \dfrac{AZ}{2}$,
δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας , άρα η απέναντι γωνία από την πλευρά αυτή είναι 30°, δηλαδή $AZK = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ, ισχύει ότι: $AEZ = AZK = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΕΖ, έχουμε:

$$EAZ + AEZ + AZK = 180^\circ \Leftrightarrow EAZ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow EAZ = 120^\circ$$

37132.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ . Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος .
γ) ΛΜ ⊥ ΛΝ .



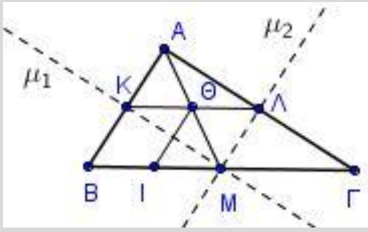
Λύση

α) Αφού το ΑΚ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα το ΑΔ είναι κάθετο στο ΒΓ. Αφού είναι ΑΚ = ΚΔ, άρα το Κ είναι μέσο του ΑΔ. Οπότε, στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά ΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και ίσες πλευρές τις ΒΑ και ΒΔ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ το ΚΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΑ, άρα είναι ΚΛ=ΒΑ/2 (1) .
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΔ το ΚΝ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΔ, άρα είναι ΚΝ=ΒΔ/2 (2)
Επειδή τα Λ, Ν είναι μέσα των ΒΑ, ΒΔ αντίστοιχα, θα είναι ΒΛ=ΒΑ/2 (3) και ΒΝ=ΒΔ/2 (4). Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΒΑ =ΒΔ (από α) ερώτημα) τότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) θα είναι ΚΛ =ΛΒ = ΒΝ = ΝΚ. Οπότε, το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

γ) Οι ΛΝ και ΒΚ είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΒΝΚΛ, άρα είναι κάθετες, δηλαδή ΛΝ ⊥ ΒΚ, οπότε θα είναι ΛΝ ⊥ ΒΓ. Αφού το ΛΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, τότε είναι ΛΜ // ΒΓ. Οπότε, αφού ΛΜ, ΒΓ παράλληλες μεταξύ τους και η ΛΝ είναι κάθετη στην μία από αυτές, την ΒΓ, τότε η ΛΝ θα είναι κάθετη και στην άλλη, δηλαδή ΛΝ ⊥ ΛΜ.

37133. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$.

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

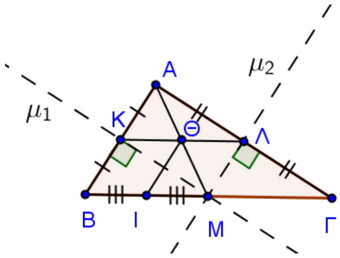
iii. $\Lambda\Theta=\frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο, ώστε $BI=\frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) i. Επειδή το σημείο Μ ανήκει στις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχει από τα σημεία Α,Β,Γ, δηλαδή

$MA=MB=M\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΜ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$.

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

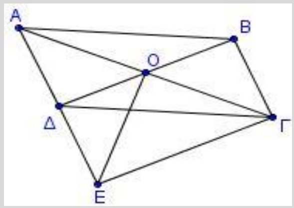
iii. Επειδή το ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιές του ΑΜ, ΚΛ είναι ίσες και διχοτομούνται. Είναι

$K\Lambda=AM\Leftrightarrow 2\Theta\Lambda=\frac{B\Gamma}{2}\Leftrightarrow \Lambda\Theta=\frac{B\Gamma}{4}$.

β) Τα σημεία Κ,Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΜ, άρα $K\Theta \parallel BM$ και $K\Theta=\frac{BM}{2}=\frac{B\Gamma}{4}=BI$.

Το τετράπλευρο ΚΘΙΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

37136. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή να τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E=A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

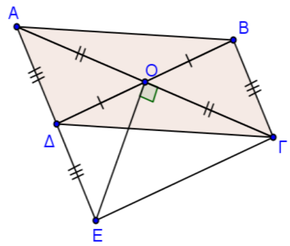
γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται, άρα το Ο είναι κοινό μέσο των ΑΓ, ΒΔ.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ η ΕΟ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

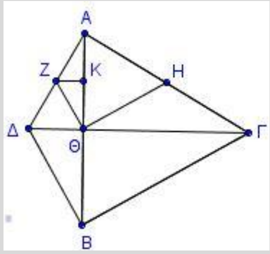
β) Είναι $B\Gamma=A\Delta=\Delta E$ και $B\Gamma \parallel \Delta E$, αφού η ΒΓ είναι παράλληλη στην ΑΔ, άρα στο τετράπλευρο ΒΓΕΔ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ η ΟΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $O\Delta=\frac{AE}{2}=\frac{2A\Delta}{2}=A\Delta$.

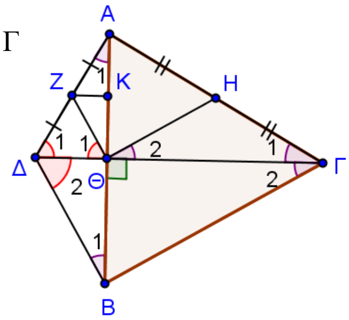
Όμως $O\Delta=OB$ και $A\Delta=B\Gamma$, άρα $OB=B\Gamma$ και το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

37138. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{\Delta}=120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.
β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή.
γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK=\frac{A\Delta}{4}$.

Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\Gamma A=\Gamma B$, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με $\Delta=120^\circ$, έχει βάση την ΑΒ και $\Delta A=\Delta B$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
Επειδή τα σημεία Γ,Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

β) Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, η ΓΔ θα είναι και διχοτόμος των γωνιών Δ και Γ, δηλαδή $\Delta_1=\Delta_2=60^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$\Theta Z=\frac{A\Delta}{2}=Z\Delta$ και αφού $\Delta_1=60^\circ$, το τρίγωνο ΔΘΖ είναι ισόπλευρο. Άρα $\Theta_1=60^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ, έχουμε: $\Gamma_1+\Theta A\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1+60^\circ=90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1=30^\circ$
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

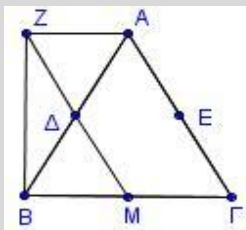
$\Theta H=\frac{A\Gamma}{2}=H\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΘΗΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΘΓ και $\Theta_2=\Gamma_1=30^\circ$.

Είναι $\Theta_1+Z\Theta H+\Theta_2=180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+Z\Theta H+30^\circ=180^\circ \Leftrightarrow Z\Theta H=90^\circ$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΘΔ έχουμε:
$\Delta_1+A_1=90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ+A_1=90^\circ \Leftrightarrow A_1=30^\circ$, τότε για την απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΖΚ ισχύει ότι:

$$ZK=\frac{AZ}{2}=\frac{\frac{A\Delta}{2}}{2}=\frac{A\Delta}{4}.$$

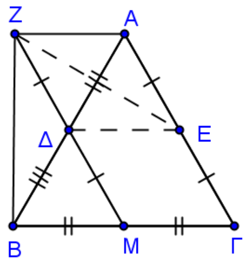
37140. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z=\Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

Λύση

α) Έστω α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου. Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν:
1) $\Delta Z=\Delta M$
2) $A\Delta=\Delta B$ γιατί το Δ είναι μέσο του ΑΒ και
3) $A\Delta Z=B\Delta M$ ως κατακορυφήν.
Λόγω του κριτηρίου ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Τα Δ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η ΔΜ είναι παράλληλη στην ΑΓ και

$\Delta\mathrm{M}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Όμως $\mathrm{ZM}=2\Delta\mathrm{M}$, οπότε τα τμήματα ΖΜ και ΑΓ είναι ίσα και παράλληλα και το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

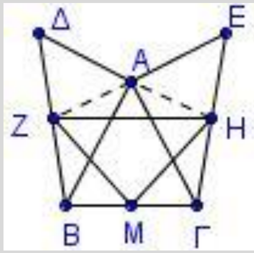
γ) Τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{E}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\frac{\alpha}{2}$.

Επειδή το ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{M\Gamma}=\frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $\mathrm{Z}\Delta=\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AE}=\mathrm{AZ}=\frac{\alpha}{2}$, το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος. Τα ΖΕ, ΑΔ είναι διαγώνιες του ρόμβου, οπότε διχοτομούνται κάθετα.

δ) Είναι $\mathrm{B}\Delta=\Delta\mathrm{M}=\Delta\mathrm{Z}=\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΜΖ η διάμεσος του ΒΔ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΒΜΖ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{Z\hat{B}M}=90^\circ$, δηλαδή $\mathrm{ZB}\perp\mathrm{BM}$.

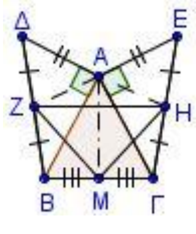
37142. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$.
Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ,Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
ii. Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές.
iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.
β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:
« 1. $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$ από την υπόθεση
2. $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
3. $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ ως κατακορυφήν
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».
Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;

Λύση

α)i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$ και 2) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα.



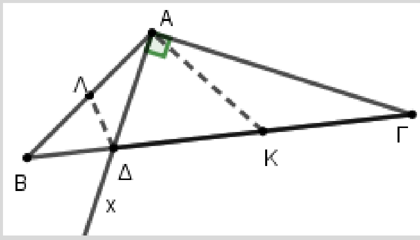
ii. Η ΑΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, άρα $\mathrm{AZ}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{2}$. Η ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΓ, άρα $\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{2}$. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα έχουν και $\Delta\mathrm{B}=\mathrm{E\Gamma}$, άρα είναι και $\mathrm{AZ}=\mathrm{AH}$, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

iii. Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:
1) $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ
2) $\mathrm{BZ}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{2}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{2}=\mathrm{\Gamma H}$ και

3) $ZBM = M\Gamma H \Leftrightarrow ZBA + B = A\Gamma H + \hat{\Gamma}$ ($ZBA = A\hat{\Gamma}H$ γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα και $B = \hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα ΜΖΒ και ΓΗΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και $MZ = MH$.Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$, τα σημεία Μ, Α ισαπέχουν από τα Ζ και Η, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΗ, δηλαδή η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.

β) Οι γωνίες ΔΑΒ και ΕΑΓ δεν είναι κατακορυφήν γιατί οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

37156.Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ με $\hat{A} = 120^\circ$.
Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές
β) $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$
γ) ΛΔ // ΑΚ
δ) $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$



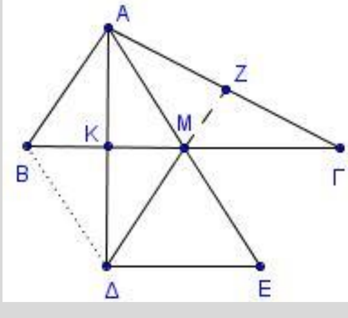
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι: $B = \Gamma$.
Είναι $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 30^\circ = \Gamma$.
Είναι $A = 120^\circ \Leftrightarrow BA\Delta + 90^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow BA\Delta = 30^\circ$.
Επειδή $BA\Delta = B$, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.

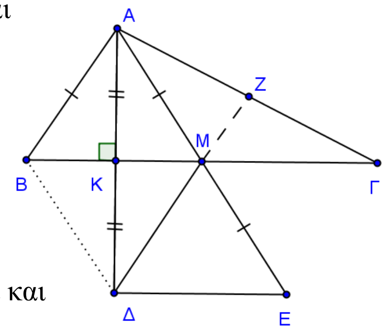
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2A\Delta$. Όμως $A\Delta = \Delta B$ αφού το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta\Gamma = 2\Delta B$

γ) Η ΔΛ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $\Delta\Lambda \perp AB$ (1). Η ΑΚ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AK = \Delta K = K\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Είναι $A\Delta\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta\Gamma = 60^\circ$ και επειδή $AK = \Delta K$, το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισόπλευρο, άρα $\Delta AK = 60^\circ$. Είναι $BAK = BA\Delta + \Delta AK = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, άρα $AK \perp AB$ (2).
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\Lambda\Delta \parallel AK$
δ) Στο τρίγωνο ΒΑΚ το Λ είναι μέσο της ΑΒ και η ΛΔ είναι παράλληλη στην ΑΚ, άρα το Δ είναι μέσο της ΒΚ και ισχύει ότι $\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Lambda\Delta$.

37157. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$.
Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος.
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ.



Λύση



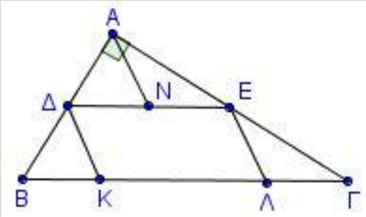
α) Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $KM \parallel \Delta E$ και $KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM$. Επειδή $KM \perp A\Delta$ και $KM \parallel \Delta E$, είναι και $\Delta E \perp A\Delta$.

β) Στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι ΑΕ, ΒΓ είναι διαγώνιές του που διχοτομούνται στο Μ, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

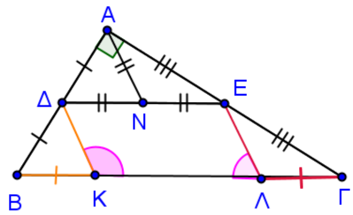
γ) Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές και η ΑΚ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τετράπλευρο ΑΒΔΜ οι ΑΔ,ΒΜ είναι διαγώνιές του που διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

δ) Επειδή ΑΒΔΜ ρόμβος, είναι $\Delta M \parallel AB$ άρα και $MZ \parallel AB$.
Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Μ είναι μέσο της ΒΓ και η ΜΖ είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

37158. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $\Delta E = 2\Delta K$



Λύση

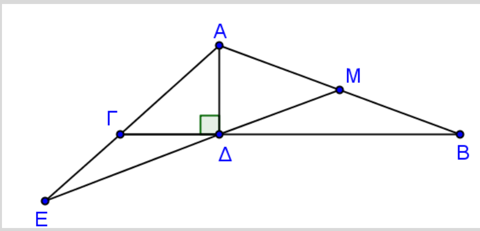


α) Επειδή $\Delta K = KB$ το τρίγωνο ΔΚΒ είναι ισοσκελές οπότε $B\Delta K = B$.
Η γωνία ΔΚΛ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΚ, άρα
$\Delta K\Lambda = B\Delta K + B = 2B$.
Επειδή $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ το τρίγωνο ΕΛΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\Lambda E\Gamma = \Gamma$. Η γωνία ΕΛΚ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΛΓ, άρα
$E\Lambda K = \Lambda E\Gamma + \Gamma = 2\Gamma$

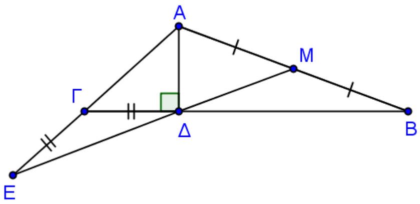
β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $B + \Gamma = 90^\circ$.
Είναι $\Delta K\Lambda + E\Lambda K = 2B + 2\Gamma = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΔΚ,ΕΛ που τέμνονται από την ΒΓ, οι ευθείες ΔΚ,ΕΛ είναι παράλληλες. Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.
Στο τετράπλευρο ΔΕΛΚ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} \Leftrightarrow \overset{K\Lambda=\Delta E}{\Leftrightarrow} 2\Delta E = \Delta K + \Delta E + E\Lambda \overset{\Delta K=E\Lambda}{\Leftrightarrow} 2\Delta E - \Delta E = 2\Delta K \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

37159. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma\,(AB > A\Gamma)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{B} = \hat{E}$
β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$
γ) $\Gamma E < A\Gamma$



Λύση



α) Επειδή $ΓΔ = ΓΕ$, το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε και $Ε = ΓΔΕ$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του άρα $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2} = ΜΒ$, οπότε το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές και ισχύει $ΜΔΒ = Β$ (2).

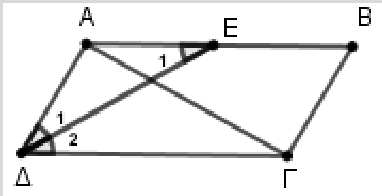
Επειδή $ΜΔΒ = ΓΔΕ$ ως κατακορυφήν, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $Β = Ε$.

β) Η γωνία Γ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΔΕ, οπότε $Γ = Ε + ΓΔΕ = 2Ε = 2Β$. Η γωνία ΑΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΒ, άρα $ΑΜΔ = ΜΔΒ + Β = 2Β$.

γ) Η ΑΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Δηλαδή $ΑΓ > ΓΔ$, όμως $ΓΔ = ΓΕ$ άρα $ΑΓ > ΓΕ$.

3ο Θέμα

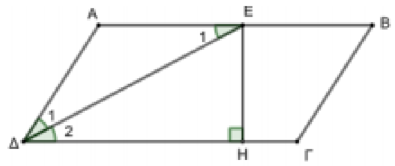
12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2·ΑΔ.
β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΕ}{ΗΕ}=2$.
γ) Αν Μ είναι το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.
δ) Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{A}Γ=90^\circ$.



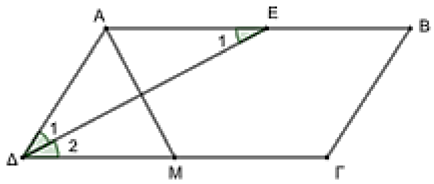
Λύση

α) Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της $Δ$, είναι $Δ_1=Δ_2$. Όμως $Δ_2=Ε_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα $Δ_1=Ε_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ. Είναι ΑΔ=ΔΕ και Ε μέσο της ΑΒ άρα $ΑΔ=\frac{ΑΒ}{2}\Leftrightarrow ΑΒ = 2ΑΔ$.

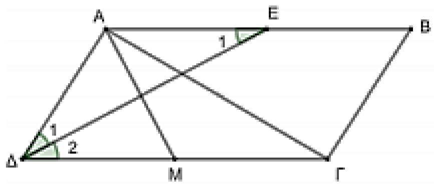
β) Οι γωνίες Α και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε $Α+Δ=180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ+Δ=180^\circ \Leftrightarrow Δ=60^\circ$, άρα $Δ_1=Δ_2=30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ είναι $Δ_2=30^\circ$ άρα $ΕΗ=\frac{ΕΔ}{2}\Leftrightarrow \frac{ΔΕ}{ΗΕ}=2$.



γ) Από το ερώτημα (α) έχουμε ΑΒ = 2·ΑΔ και ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οπότε ΔΓ = 2 ΑΔ (1). Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ, έχουμε ΔΓ = 2 ΔΜ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ΑΔ = ΔΜ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



δ) Επειδή το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο είναι $ΑΜ=ΜΔ=\frac{ΔΓ}{2}$, οπότε στο τρίγωνο ΔΑΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΓ, οπότε $ΔΑΓ=90^\circ$.

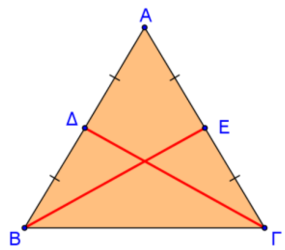


Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο

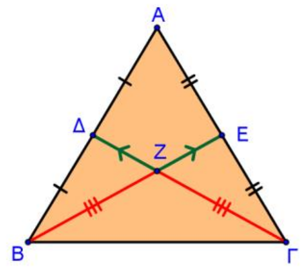
Θέμα 4ο

1706. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση *Π*, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της *Π* και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.
γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η *Π* και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

Λύση



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ .
1) ΒΔ=ΕΓ(μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)
2) ΒΓ κοινή πλευρά
3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)
Άρα (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα και ΒΕ=ΓΔ ($\mu_\beta = \mu_\gamma$)



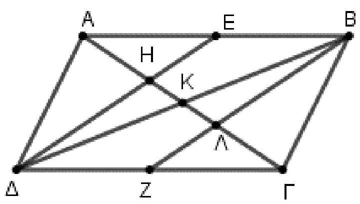
β) Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με β=γ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ
1) ΔΖ=ΖΕ($\Delta Z = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}\Gamma\Delta = Z\Delta$)
2) ΒΖ=ΓΖ ($BZ = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}\Gamma\Delta = \Gamma Z$)
3) $\Delta\hat{Z}B = E\hat{Z}\Gamma$ (κατά κορυφήν)
Άρα τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ είναι ίσα και $\Delta B = E\Gamma \Leftrightarrow 2\Delta B = 2E\Gamma \Leftrightarrow AB = A\Gamma$.
Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β=γ αν και μόνο αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

1728. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.
γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Λύση

α) Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$,οπότε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\Delta EB = BZ\Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cancel{180^\circ} - A\widehat{E\Delta} = \cancel{180^\circ} - B\widehat{Z\Gamma} \Leftrightarrow AE\Delta = BZ\Gamma$.
2ος τρόπος: $AE\Delta = BZ\Gamma$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες

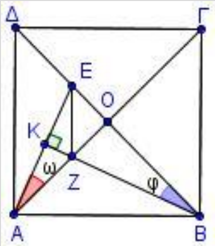
γ) Έστω Κ το κέντρο του παραλληλογράμμου, Η το σημείο τομής των ΔΕ, ΑΓ και Λ το σημείο τομής των

ΒΖ, ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΔΒ οι ΑΚ, ΔΕ είναι διάμεσοι, οπότε το σημείο τομής τους Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $AH=\frac{2}{3}AK=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma=\frac{1}{3}A\Gamma$ (1) . Στο τρίγωνο ΒΓΔ οι ΒΖ, ΓΚ είναι διάμεσοι του, οπότε το σημείο τομής τους Λ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $\Gamma\Lambda=\frac{2}{3}\Gamma K=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}A\Gamma=\frac{1}{3}A\Gamma$ (2).

Είναι $H\Lambda=A\Gamma-AH-\Gamma\Lambda=\frac{1}{3}A\Gamma$ (3).

Από τις (1), (2), (3) είναι ΑΗ = ΗΛ = ΛΓ.

1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.
β) $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$.
γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ.



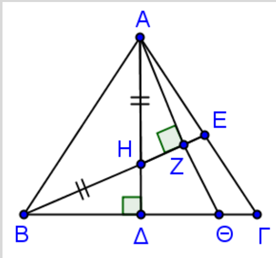
Λύση

α) Οι γωνίες ω και φ είναι ίσες γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες ($AE\perp BK$ και $A\Gamma\perp B\Delta$ γιατί οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι κάθετες)

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΕ και ΒΟΖ έχουν:
1) $AO=OB$ μισά των ίσων διαγωνίων του τετραγώνου και
2) $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $BZ=AE$ και $OZ=OE$
Είναι $\Gamma O=OB$ και $OZ=OE$, άρα και $\Gamma O+OZ=OB+OE\Leftrightarrow \Gamma Z=BE$.

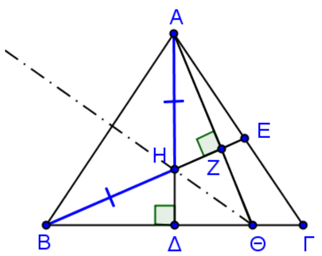
γ) Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΚ και ΑΟ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους Ζ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το ΕΖ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου, δηλαδή $EZ\perp AB$.

1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και το ύψος του ΑΔ.
Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε $HA=HB$.
Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ.
Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα.
ii. $\Delta\Theta=\Theta Z$
iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.
β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΕ έχουν:
1) $HA=HB$ και
2) $BH\Delta=AHZ$ ως κατακορυφήν άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.



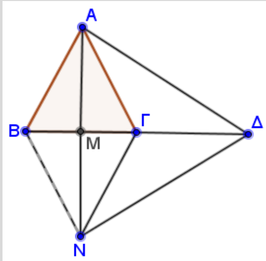
ii. Επειδή $HA=HB$, το τρίγωνο ΗΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $HAB=HBA$ (1). Ακόμη επειδή τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ίσα, ισχύει ότι $HAZ=HB\Delta$(2).

Από $(1)+(2) \Rightarrow \mathrm{HAB}+\mathrm{HAZ}=\mathrm{HBA}+\mathrm{HB\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{BAZ}=\mathrm{AB\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΘΑΒ είναι ισοσκελές και έχει $\Theta A=\Theta B$. Επειδή $\Theta A=\Theta B$ και $ZA=\Delta B$ $\left(\mathrm{H}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta=\mathrm{H}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{Z}\right)$ είναι και $\Theta E=\Theta\Delta$.

iii. Επειδή $\Theta A=\Theta B$ και $HA=HB$, τα σημεία Θ, Η ισαπέχουν από τα άκρα Α,Β του τμήματος ΑΒ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Δηλαδή η ΘΗ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Τα τμήματα ΑΖ,ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΗΒ που τέμνονται στο Θ, άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ.

1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.
γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.



Λύση

α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος. Οι ΑΝ, ΒΓ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

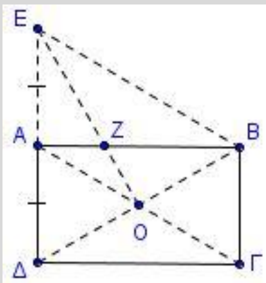
β) Στο τρίγωνο ΑΔΝ η ΔΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\Gamma M=\frac{1}{2}B\Gamma=\frac{1}{2}\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma=2\Gamma M=2(\Delta M-\Delta\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Delta\Gamma=2\Delta M-2\Delta\Gamma \Leftrightarrow 3\Delta\Gamma=2\Delta M \Leftrightarrow \Delta\Gamma=\frac{2}{3}\Delta M$.

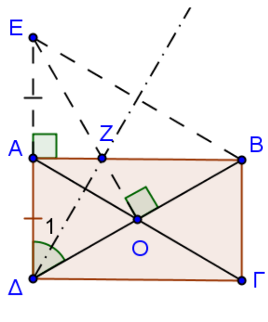
Το σημείο Γ βρίσκεται στη διάμεσο ΔΜ και απέχει από τη κορυφή Δ απόσταση ίση με τα 2/3 της διαμέσου, άρα είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

1764. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AB>B\Gamma$, $A\Gamma=2B\Gamma$.
Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta A=AE$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.
γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.



Λύση

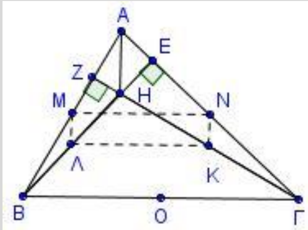
α) Επειδή $AE=A\Delta=B\Gamma$, $A\Delta \parallel B\Gamma$ και τα σημεία Α,Δ,Ε είναι συνευθειακά, τα τμήματα ΑΕ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Η ΑΒ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές.
Είναι $AO=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{B\Delta}{2}=O\Delta$ και $\frac{A\Gamma}{2}=B\Gamma=A\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΔ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ισόπλευρο. Τότε οι γωνίες του είναι ίσες με 60°, άρα $\Delta_1=60^\circ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΔΒ μια γωνία του είναι 60°, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα ΕΟ, ΒΑ είναι ύψη στο ισόπλευρο τρίγωνο ΕΔΒ, οπότε το σημείο τομής τους Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και η ΔZ είναι το τρίτο ύψος του. Δηλαδή $\Delta Z \perp EB$.

1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου.
Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων Α Β, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $MN = \Lambda K$
ii. $NK = M\Lambda = \dfrac{AH}{2}$
iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.
β) Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $M\hat{O}K = 90^\circ$.

Λύση

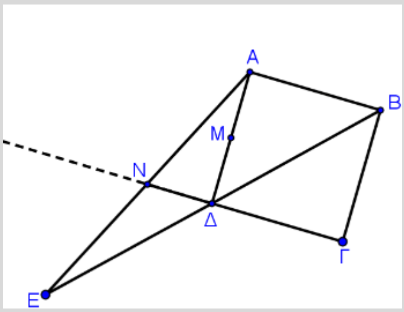
α) i. Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα
$MN \parallel B\Gamma$ και $MN = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα $K\Lambda \parallel B\Gamma$ και $K\Lambda = \dfrac{B\Gamma}{2}$.Είναι $MN = K\Lambda = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

ii. Τα Ν,Κ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΗΓ, άρα $NK \parallel AH$ και $NK = \dfrac{AH}{2}$. Τα Μ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΗΒ, άρα $M\Lambda \parallel AH$ και $M\Lambda = \dfrac{AH}{2}$. Είναι $NK = M\Lambda = \dfrac{AH}{2}$.

iii. Επειδή $MN \parallel K\Lambda$ και $MN = K\Lambda$, το τετράπλευρο ΜΝΚΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $AH \perp B\Gamma$. Επειδή $MN \parallel B\Gamma$ και $M\Lambda \parallel AH$, είναι $MN \perp M\Lambda$, άρα το παραλληλόγραμμο ΜΝΚΛ έχει μία ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.

β) Τα Κ,Ο είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα $KO \parallel BH$.
Τα Μ,Ο είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $MO \parallel A\Gamma$. Όμως $BH \perp A\Gamma$ άρα και $KO \perp MO$, δηλαδή $MOK = 90^\circ$.

1780. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$.
Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

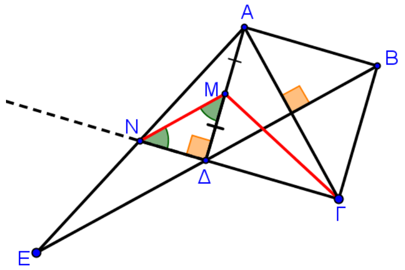


α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι:
i. $MN \perp A\Gamma$
ii. $\Gamma M \perp AN$

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΕΑΒ το Δ είναι μέσο της ΕΒ και η ΔΝ είναι παράλληλη στην ΑΒ (απέναντι πλευρές τετραγώνου), άρα το Ν είναι μέσο της ΑΕ και ισχύει ότι $\Delta N = \dfrac{AB}{2}$. Όμως $AB = A\Delta$ και $\Delta M = \dfrac{A\Delta}{2}$, άρα $\Delta N = \Delta M$

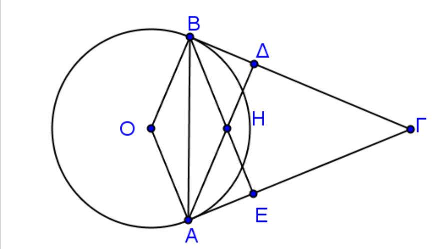
β) Το τρίγωνο ΝΜΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta N = \Delta M$, δηλαδή είναι και ισοσκελές, άρα $\Delta NM = \Delta MN = \dfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$



γ) i. Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η ΜΝ είναι παράλληλη στην ΔΕ. Η ΔΕ όμως είναι κάθετη στην ΑΓ αφού οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι κάθετες, άρα και $MN \perp A\Gamma$.

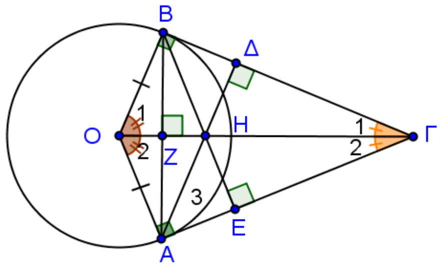
ii. Στο τρίγωνο ΑΝΓ τα ΝΜ και ΑΔ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το Μ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΓΜ είναι ύψος του τριγώνου, δηλαδή $\Gamma M \perp AN$.

1823. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος.
γ) Τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά.



Λύση

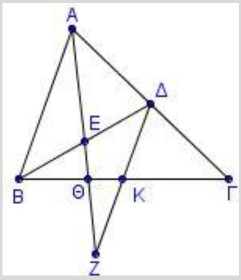
α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα, άρα $A\Gamma = B\Gamma$. Η διακεντρική ευθεία ΓΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΓΑ των εφαπτομένων καθώς και τη γωνία ΒΟΑ των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΑ η ΓΖ είναι διχοτόμος, οπότε είναι ύψος και διάμεσος δηλαδή είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.
Το σημείο Η είναι το σημείο τομής των υψών ΑΔ και ΒΕ (ορθόκεντρο),άρα ανήκει στη ΓΖ. Επειδή το σημείο Η ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή $HA = HB$, άρα το τρίγωνο ΗΒΑ είναι ισοσκελές.



β) Επειδή ΟΑ, ΟΒ ακτίνες, ισχύει ότι $OA \perp A\Gamma$ και $OB \perp B\Gamma$. Όμως $BE \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, άρα $OA \parallel BE$ και $OB \parallel A\Delta$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $OA = OB = R$, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

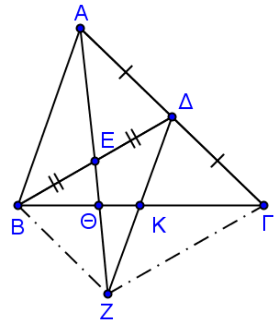
γ) Τα σημεία Ο,Η,Γ ανήκουν στη διακεντρική ευθεία ΟΓ .Επομένως τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά.

1827. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ.
Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.



Λύση

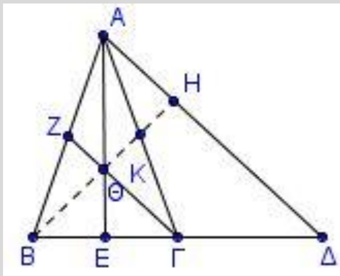
α) Οι ΑΖ,ΒΔ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΖΔ και διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



β) Οι ΒΖ,ΑΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $ΒΖ = ΑΔ$ και $ΒΖ \parallel ΑΔ$. Όμως $ΑΔ = ΔΓ$, οπότε $ΒΖ = ΔΓ$ και $ΒΖ \parallel ΔΓ$,άρα το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Επειδή το ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται. Άρα το Κ είναι μέσο του ΔΖ. Στο τρίγωνο ΒΔΖ τα ΕΖ,ΒΚ είναι διάμεσοι, άρα το Θ που είναι το σημείο τομής τους είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.
Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$.
Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΑΗ = ΘΓ$
γ) $ΑΗ = 2ΖΘ$



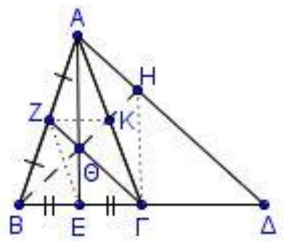
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ζ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα

$ΖΕ \parallel ΑΓ \Leftrightarrow ΖΕ \parallel ΚΓ$ και $ΖΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).

Επειδή ΑΕ,ΓΖ διάμεσοι, το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, οπότε

$ΘΖ = \frac{1}{3}ΓΖ$, δηλαδή $ΓΘ = 2ΘΖ$. όμως $ΓΘ = ΑΗ$, άρα $ΑΗ = 2ΖΘ$

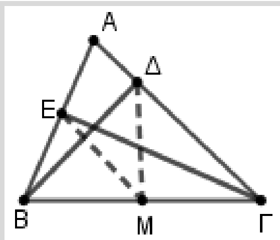


β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Ζ,Γ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΖΓ \parallel ΑΔ \Leftrightarrow ΘΓ \parallel ΑΗ$ (3). Στο τρίγωνο ΒΗΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και $ΓΘ \parallel ΗΔ$, άρα το Θ είναι μέσο του ΒΗ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Θ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΘΕ \parallel ΗΓ \Leftrightarrow ΑΘ \parallel ΗΓ$ (4). Από τις (3),(4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Άρα $ΑΗ = ΘΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

γ) 1ος τρόπος: Στο τρίγωνο ΒΑΗ τα Ζ,Θ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΖΘ = \frac{ΑΗ}{2} \Leftrightarrow ΑΗ = 2ΖΘ$

2ος τρόπος: Επειδή το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$ και $ΘΖ = \frac{1}{3}ΓΖ$, δηλαδή $ΓΘ = 2ΘΖ$. όμως $ΓΘ = ΑΗ$, άρα $ΑΗ = 2ΖΘ$

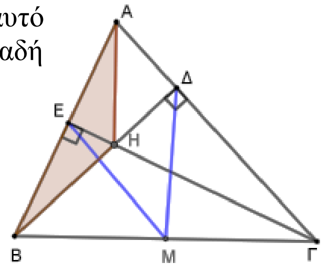
37085. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΜΔ = ΜΕ
ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα την ΒΓ και ότι $Α\hat{Η}Δ = \hat{Γ}$, όπου Γ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.



Λύση

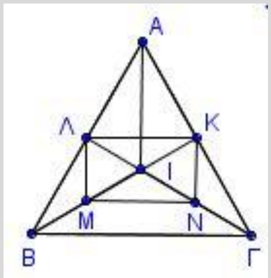
α) i.Τα ΜΔ, ΜΕ είναι διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα τους ΒΓ, οπότε: $ΜΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ και $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα ΜΔ = ΜΕ.

ii. Επειδή τα ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η, το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε και το ΑΗ είναι ύψος του, δηλαδή $AH \perp B\Gamma$. Επειδή $AH \perp B\Gamma$ και $H\Delta \perp A\Gamma$ οι οξείες γωνίες $\hat{AH\Delta}, \hat{\Gamma}$ έχουν πλευρές κάθετες οπότε είναι ίσες.



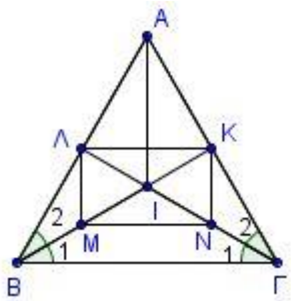
β) Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά ΑΒ είναι το ΗΕ και το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά ΒΗ είναι το ΑΔ. Επειδή οι φορείς των ΕΗ, ΑΔ τέμνονται στο Γ, το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.

37087. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.
Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.
γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Τα ΒΚ, ΛΓ είναι ύψη του ισόπλευρου τριγώνου, οπότε είναι και διχοτόμοι και διάμεσοί του. Άρα $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 30^\circ$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

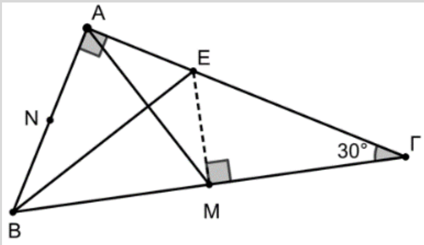


β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ έχουν:
1) $BI = I\Gamma$ αφού το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.
2) $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
Άρα τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.

γ) Στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου και το ΑΙ είναι επίσης ύψος του τριγώνου. Επειδή όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, το ύψος ΑΙ είναι και διάμεσος, άρα το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.

δ) Επειδή ΒΚ,ΓΛ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $IK = \frac{1}{3}BK$, $I\Lambda = \frac{1}{3}\Gamma\Lambda$, $IN = \frac{1}{2}\Gamma I = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\Lambda = \frac{1}{3}\Gamma\Lambda$ και $MI = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BK = \frac{1}{3}BK$. Επειδή $\Lambda I = MI = NI = KI$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα, τα τμήματα ΛΙ και ΚΙ είναι ίσα, οπότε και τα τμήματα ΝΛ και ΜΚ είναι ίσα.
Στο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ οι διαγώνιές του ΜΚ και ΝΛ είναι ίσες, οπότε είναι ορθογώνιο.

37104.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) και $\hat{\Gamma}=30^o$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

ii) $AE=\dfrac{\Gamma E}{2}$.

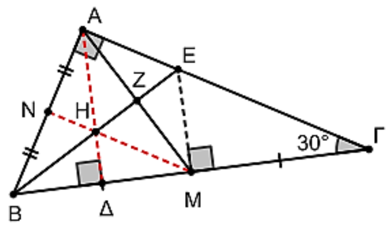
iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ.

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΒΕΓ Η ΕΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι ισοσκελές και έχει $M\hat{B}E=\hat{\Gamma}=30^\circ$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:
$A\hat{B}\Gamma+\hat{\Gamma}+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma+30^\circ=90^\circ \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma=60^\circ$. Όμως $M\hat{B}E=30^\circ$, οπότε $A\hat{B}E=60^\circ-30^\circ=30^\circ$, δηλαδή $M\hat{B}E=A\hat{B}E$, άρα η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

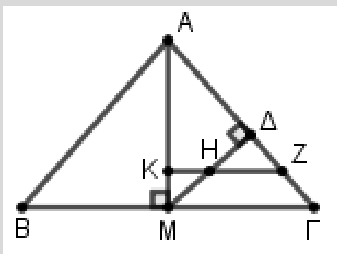
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $A\hat{B}E=30^\circ$, άρα $AE=\dfrac{1}{2}BE$. Όμως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα ΒΕ= ΕΓ, οπότε $AE=\dfrac{1}{2}\Gamma E$.

iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma}=30^o$, άρα $AB=\dfrac{1}{2}B\Gamma=BM$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ. Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΜ είναι ύψος και διάμεσός του, άρα η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΜ τα ΑΔ, ΒΖ είναι ύψη του που τέμνονται στο Η, άρα το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το ΒΗ είναι ύψος του. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσά του, άρα $AM=\dfrac{1}{2}B\Gamma=MB$, επομένως το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Επειδή το ΒΗ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΜΒ, είναι και διάμεσός του, άρα η ΒΗ διέρχεται από το Ν, δηλαδή τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

37116. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



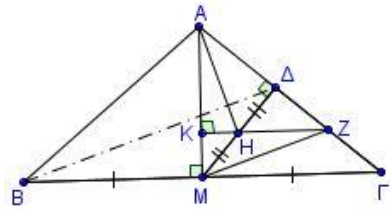
α) $HZ=\dfrac{B\Gamma}{4}$

β) $MZ \parallel B\Delta$

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

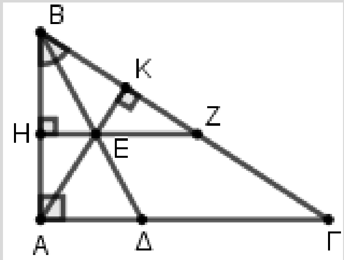
Λύση

α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τρίγωνο ΜΔΓ το Η είναι μέσο της ΜΔ και $HZ \parallel M\Gamma$, άρα το Ζ είναι μέσο της ΔΓ και ισχύει ότι $HZ=\dfrac{M\Gamma}{2}=\dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2}=\dfrac{B\Gamma}{4}$.



β) Στο τρίγωνο ΒΔΓ τα Μ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $\mathrm{MZ} \parallel \mathrm{B\Delta}$.

γ) Είναι $\mathrm{KZ} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{B\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, άρα $\mathrm{KZ} \perp \mathrm{AM}$. Στο τρίγωνο ΑΜΖ τα ΜΔ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το Η, είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το ΑΗ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή $\mathrm{AH} \perp \mathrm{MZ}$ και επειδή $\mathrm{MZ} \parallel \mathrm{B\Delta}$ είναι και $\mathrm{AH} \perp \mathrm{B\Delta}$.



37137. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος ,που τέμνονται στο Ε.Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

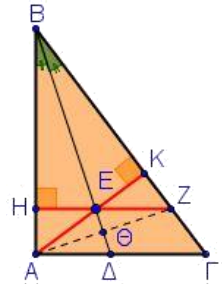
i) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.

ii) Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές.

iii) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ.

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Λύση



α) i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ .Έχουν:

- $\mathrm{H\hat{E}A} = \mathrm{K\hat{E}Z}$ (κατακορυφήν)
- ΗΕ=ΕΚ (Ε σημείο της διχοτόμου ΑΔ και ΕΗ,ΕΚ αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$)

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.

ii) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ. Έχουν:

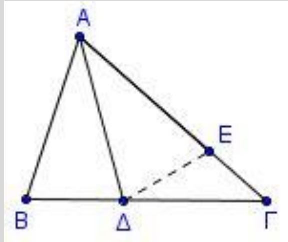
- $\mathrm{HEB} = \mathrm{BEK}$ ως συμπληρωματικές των $\mathrm{H\hat{B}E} = \mathrm{E\hat{B}K}$ (ΒΔ διχοτόμος)
- ΗΕ=ΕΚ

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ=ΒΚ . Επομένως το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές.

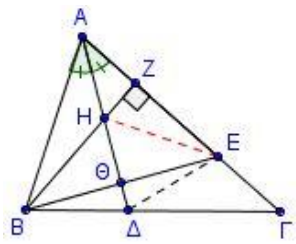
iii) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το σημείο Ε είναι ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών ΑΚ, ΖΗ) οπότε και το ΑΘ είναι ύψος αφού διέρχεται από το Ε. Άρα η ΑΕ είναι κάθετη στην ΑΖ.

β) Στην περίπτωση αυτή το ΑΚ είναι ύψος άρα και διχοτόμος.
Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ άρα είναι έγκεντρο.
Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

37163. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = AB$.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.
γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.



Λύση



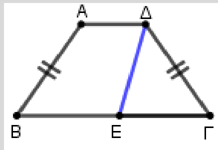
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:
1) την πλευρά ΑΔ κοινή
2) $AE = AB$ και
3) $\hat{BA\Delta} = \hat{\Delta AE}$ λόγω της διχοτόμησης
Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα και ΔΒ=ΔΕ.

β) Επειδή ΑΒ=ΑΕ ,ΔΒ=ΔΕ τα Α,Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΕ .
Άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.
γ) Στο τρίγωνο ΑΒΕ τα ΑΘ,ΒΗ είναι ύψη που τέμνονται στο Η, άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το ΕΗ είναι το τρίτο ύψος. Δηλαδή $EH \perp AB$.

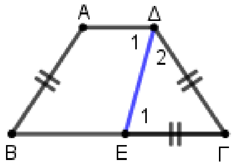
Τραπέζιο

2ο Θέμα

13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{\text{ΑΔΓ}}$.
β) Αν $\hat{\text{Α}} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.



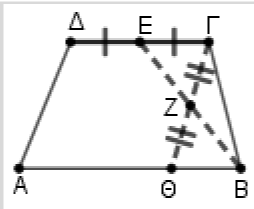
Λύση



α) Επειδή ΓΔ=ΓΕ το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, άρα $\text{Δ}_2 = \text{Ε}_1$ (1).
Είναι $\text{Δ}_1 = \text{Ε}_1$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΕ. Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\text{Δ}_1 = \text{Δ}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της ΑΔΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $\text{Δ} = \text{Α} = 120^\circ$. Τότε $\text{Δ}_2 = \frac{\text{Δ}}{2} = 60^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΓΕ έχει μία γωνία του 60°, οπότε είναι ισόπλευρο.

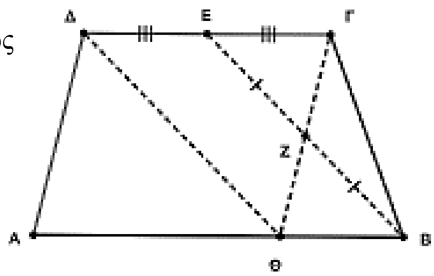
13824. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα.
β) ΕΓ=ΘΒ.
γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ τα οποία έχουν:
- ΕΖ=ΖΒ (από υπόθεση)
- $\text{ΖΕΓ} = \text{ΖΒΘ}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΕ και ΘΒ που τέμνονται από την ΒΕ)
- $\text{ΕΖΓ} = \text{ΘΖΒ}$ (ως κατακορυφήν)

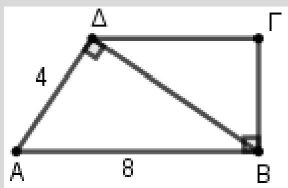
Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι ΕΓ=ΘΒ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\text{ΕΖΓ} = \text{ΘΖΒ}$, πλευρές.

γ) ΔΕ//ΒΘ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
Από το ερώτημα β) έχουμε ΕΓ=ΒΘ, επίσης Ε μέσο της πλευράς ΓΔ άρα ΕΓ=ΔΕ οπότε ΒΘ=ΔΕ, επομένως το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ.
Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:
α) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\text{ΔΑΒ}}$.
β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

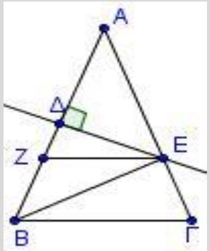


Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία ΔΒΑ ισούται με 30 μοίρες. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε
$\Delta\hat{A}B + \hat{\Delta} + \Delta\hat{B}A = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{B}A = 60^o$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $A\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30ο άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή
$B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$

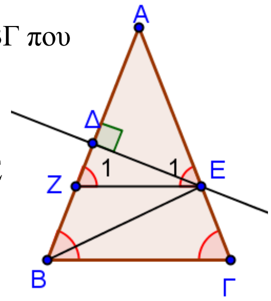
34385. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$.
Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.
α) Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



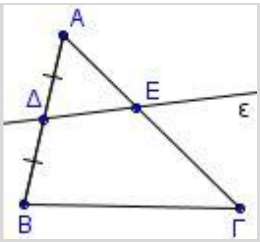
Λύση

α) Η ΕΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΕΒ, άρα είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και έχει $AE = BE$.

β)Είναι $Z_1 = B$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ και $E_1 = \Gamma$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Όμως $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα και $Z_1 = E_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΖΕ και είναι $AZ = AE$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AE$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AE \Leftrightarrow ZB = E\Gamma$ (1).
Επειδή $EZ \parallel B\Gamma$ (2) και οι πλευρές ΖΒ, ΕΓ τέμνονται (3),από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

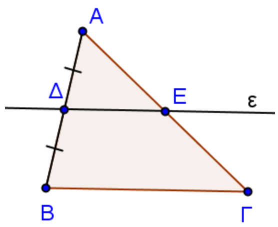


34392. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ.
Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.
α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

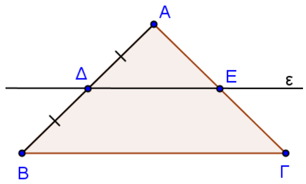


Λύση

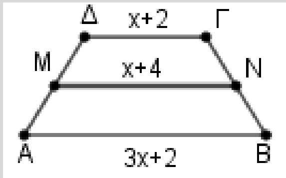
α) Αν το ΒΔΕΓ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Α, παράλληλες θα είναι οι ΔΕ, ΒΓ. Επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΒ και η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ, το Ε θα είναι μέσο της ΑΓ.



β) Αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε $B\Delta = \Gamma E$. Όμως $B\Delta = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



34409. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και ΜΝ η διάμεσός του.
α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι ΑΒ = 3x + 2, ΓΔ = x + 2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ = x + 4, τότε να δείξετε ότι x = 2.
β) Αν η γωνία Γ^ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου, άρα:

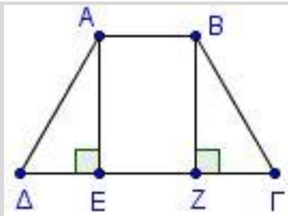
$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x + 4 = \frac{3x + 2 + x + 2}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\cdot(x+4) = 4x + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές οπότε $A = B\,(1)$ και $\Gamma = \Delta$ (2).
Το άθροισμα των γωνιών του τραπεζίου είναι ίσο με 360° άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \cancel{2}\hat{B} + \cancel{2}\hat{\Gamma} = \cancel{360^\circ} \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \overset{\hat{B}=2\hat{\Gamma}}{\Leftrightarrow} 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

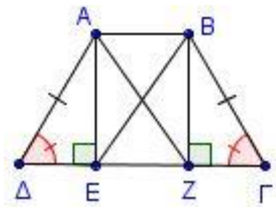
Επομένως $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ = \hat{A}$

34488. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα ΑΕ, ΒΖ στη ΔΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E = \Gamma Z$.
β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο.



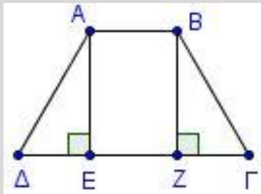
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου και
2) $\Delta = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = \Gamma Z$.

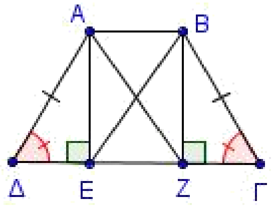


β) Επειδή $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, θα είναι και $AE \perp AB$. Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

34491. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$.
Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα στη ΔΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E = \Gamma Z$
β) $AZ = BE$



Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

1) $\text{ΑΔ}=\text{ΒΓ}$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου και

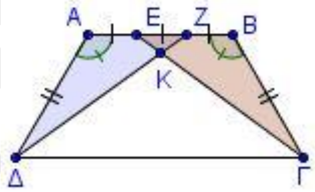
2) $\Delta=\Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{ΔΕ}=\text{ΓΖ}$.

β) Επειδή $\text{ΑΕ}\perp\text{ΓΔ}$ και $\text{ΑΒ}\parallel\text{ΓΔ}$, θα είναι και $\text{ΑΕ}\perp\text{ΑΒ}$.
Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.
Οι ΑΖ, ΒΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες.

34509. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ}\parallel\text{ΓΔ}$ και $\text{ΑΒ}<\text{ΓΔ}$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $\text{ΑΕ}=\text{ΕΖ}=\text{ΖΒ}$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\text{ΔΖ}=\text{ΓΕ}$.
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή.

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ έχουν:

1) $\text{ΑΖ}=\text{ΕΒ}=\frac{2}{3}\text{ΑΒ}$

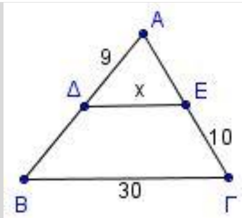
2) $\text{ΑΔ}=\text{ΒΓ}$, ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου και

3) $\text{Α}=\text{Β}$ βρίσκονται σε μια βάση του ισοσκελούς τραπεζίου

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{ΔΖ}=\text{ΓΕ}$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ είναι ίσα, έχουν και $\text{ΚΕΖ}=\text{ΚΖΕ}$, οπότε το τρίγωνο ΕΚΖ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.
Επειδή το τρίγωνο ΕΚΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ, είναι $\text{ΚΖ}=\text{ΚΕ}$. Όμως είναι και $\text{ΔΖ}=\text{ΓΕ}$, άρα και $\text{ΔΖ}-\text{ΚΖ}=\text{ΓΕ}-\text{ΚΕ}\Leftrightarrow\text{ΚΔ}=\text{ΚΓ}$, οπότε το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ισοσκελές.

36092. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $\text{ΑΔ}=9$, $\text{ΕΓ}=10$ και $\text{ΒΓ}=30$.
α) Να υπολογίσετε
i. το μήκος x του τμήματος ΔΕ.
ii. την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.



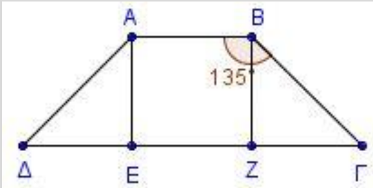
Λύση

α) Είναι $2\tau=\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΑΓ}=2\text{ΑΔ}+30+2\text{ΕΓ}=18+30+20=68$

β) Επειδή τα σημεία Δ,Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $\text{ΔΕ}\parallel\text{ΒΓ}$ και $\text{ΔΕ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}$. Επειδή επιπλέον οι πλευρές ΔΒ, ΕΓ τέμνονται στο Α, το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

γ) $\text{ΔΕ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{30}{2}=15$

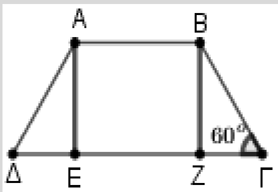
36106. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ.



Λύση

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $A = B = 135^\circ$.
Οι γωνίες Β και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$, άρα και $\Delta = \Gamma = 45^\circ$.
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ είναι $\Gamma = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $Z B \Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $BZ = Z\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι $\Delta = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $\Delta A E = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $AE = E\Delta$. Όμως το ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο, οπότε $AE = BZ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του, άρα $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.

36112. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ.



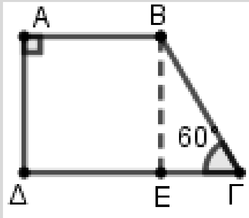
Λύση

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $\Delta = \Gamma = 60^\circ$. Οι γωνίες Β και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή
$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 120^\circ$, άρα και $A = B = 120^\circ$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:
1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες και
2) $\Delta = \Gamma = 60^\circ$
Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα.

γ) Είναι $B = 120^\circ$ και $ABZ = 90^\circ$, άρα $ZB\Gamma = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει ότι $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = 2$. Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta E = Z\Gamma = 2$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο, ισχύει ότι $EZ = AB = 6$, άρα
$\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$.
Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24$

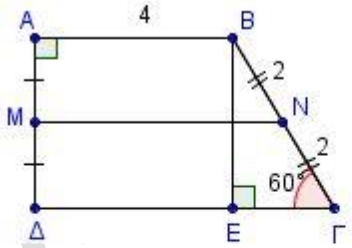
36113. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = ΒΓ = 4$, $\hat{Α} = 90^\circ$ και $Γ = 60^\circ$. Φέρνουμε το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.



α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = ΒΓ$.
γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ.

Λύση

α) Επειδή $Α = 90^\circ$ είναι $ΑΔ \perp ΑΒ$, όμως $ΑΒ \parallel ΓΔ$, άρα και $ΑΔ \perp ΓΔ$, οπότε $Δ = 90^\circ$. Οι γωνίες Β και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $Β + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow Β + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Β = 120^\circ$.

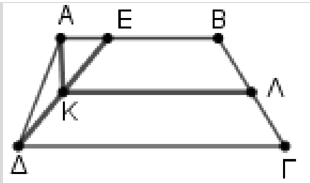


β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ, έχουμε:
$ΕΒΓ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΒΓ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow ΕΒΓ = 30^\circ$, τότε στο τρίγωνο αυτό ισχύει ότι $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 2ΕΓ = ΒΓ$.

γ) Είναι $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Το ΜΝ ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου, οπότε η ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ και ισχύει ότι:

$$ΜΝ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{4 + ΔΕ + ΕΓ}{2} = \frac{4 + 4 + 2}{2} = 5$$

36166. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = 3$, $ΓΔ = 4$.
Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $ΑΕ = 1$.
Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

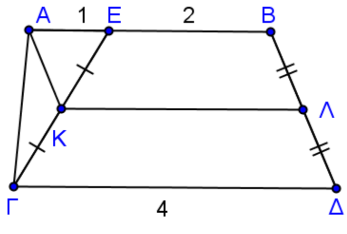


α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

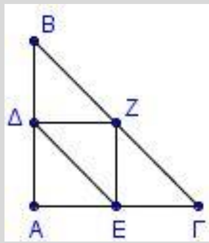
α) Είναι $ΚΛ \parallel ΑΒ \parallel ΓΔ$ και

$$ΚΛ = \frac{ΕΒ + ΓΔ}{2} = \frac{ΑΒ - ΑΕ + ΓΔ}{2} = \frac{3 - 1 + 4}{2} = 3$$



β) Είναι $ΚΛ \parallel ΑΒ$ και $ΚΛ = ΑΒ = 3$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΛΚ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

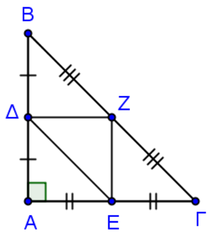
36337. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ \left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο.
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Επειδή τα Δ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΔΖ \parallel ΑΓ \Leftrightarrow ΔΖ \parallel ΑΕ$ και $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΕ$. Στο τετράπλευρο ΑΕΖΔ δύο απέναντι πλευρές του, οι ΔΖ και ΑΕ, είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

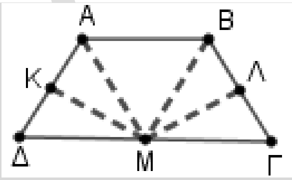


Επειδή όμως $Α = 90^\circ$, το ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο.

Είναι $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΑΕ$, οπότε το ΑΔΖΕ είναι τετράγωνο.

β) Επειδή τα σημεία Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ (1). Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχει $ΑΒ = ΑΓ$, τότε όμως είναι και $ΔΒ = ΕΓ$ (2) γιατί είναι μισά των ΑΒ, ΑΓ. Επειδή οι ΒΔ και ΕΓ τέμνονται στο Α (3), από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

36340.Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ και ΑΔ = ΒΓ), το μέσο Μ της πλευράς ΔΓ και τα μέσα Κ και Λ των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.
β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.



Λύση

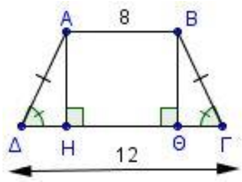
α) Τα τρίγωνα ΔΚΜ και ΜΛΓ έχουν:
1) ΚΔ= ΛΓ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΔ, ΒΓ του ισοσκελούς τραπεζίου.
2) ΔΜ=ΜΓ γιατί είναι μισά της ΔΓ
3) $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου.
Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΜ=ΜΛ.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΒΜΓ έχουν:
1) ΑΔ=ΒΓ γιατί είναι οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου.
2) ΔΜ=ΜΓ
3) $\hat{Δ} = \hat{Γ}$
Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΜ= ΒΜ.

37010. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΑΒ = 8$ και $ΔΓ = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,
α) να αποδείξετε ότι $ΔΗ = ΘΓ$.
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.

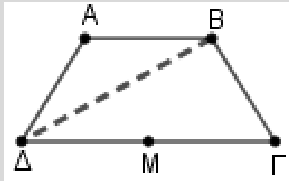
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ έχουν:
1) $ΑΔ = ΒΓ$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου και
2) $Δ = Γ$ βρίσκονται στη βάση του τραπεζίου
Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΔΗ = ΘΓ$.



β) Αν δ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε: $δ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{8+12}{2} = 10$

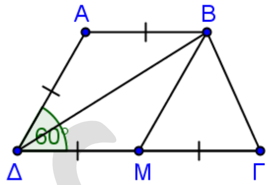
37011. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$,



$\hat{\Delta} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

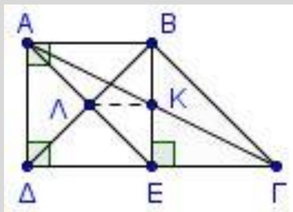
α) Είναι $M\Delta B = AB\Delta$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ. Επειδή $AB = A\Delta$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $A\Delta B = AB\Delta$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\Delta B = A\Delta B$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.



β) Είναι $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = AB$ και $\Delta M \parallel AB$, αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, άρα το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AB = A\Delta$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, ισχύει ότι $BM = \Delta M$, όμως $\Delta M = M\Gamma$, άρα $BM = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.
Είναι $BM\Gamma = \Delta = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΜ που τέμνονται από την ΔΓ. Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει μια γωνία του ίση με 60°, είναι ισόπλευρο.

4ο Θέμα

1727. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
β) $B\Delta = AE$
γ) $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

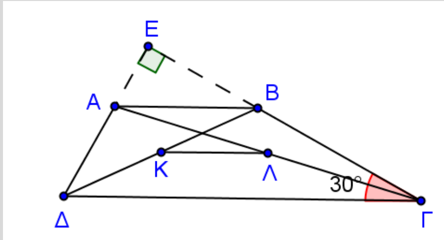
Λύση

α) Επειδή οι γωνίες Β,Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $B = 3\Gamma$ άρα
$3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο. Οι ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:
$EB\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow EB\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές. Άρα $BE = E\Gamma$. Όμως $AB = \Delta E = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$, οπότε και $E\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma\Delta = AB$. Στο τρίγωνο ΑΕΓ τα Λ,Κ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Delta = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$.

1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του.
Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = 2AE$
β) $K\Lambda = A\Delta$
γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.



Λύση

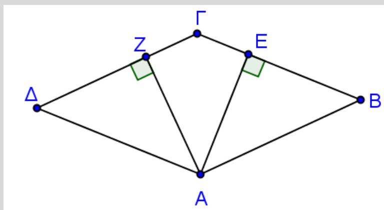
α) Είναι $A\hat{B}E = \hat{\Gamma} = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $A\hat{B}E = 30^\circ$, άρα

$$AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AE.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα $E\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta E$. Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου, ισχύει ότι: $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \frac{2\Delta E - 2EA}{2} = \frac{2(\Delta E - EA)}{2} = A\Delta$

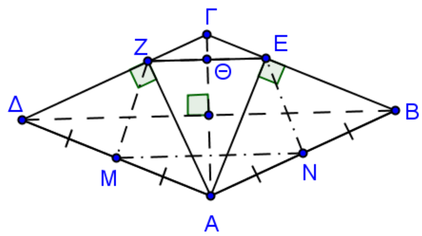
γ) Για να είναι το ΑΒΛΚ παραλληλόγραμμο πρέπει οι πλευρές του ΚΛ και ΑΒ να είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ γιατί η ΚΛ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου και $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = A\Delta$, οπότε πρέπει $A\Delta = AB$ ή $\frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta - AB = 2AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3AB$.

1742. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B} \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.
β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ.
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:
1) $AB = A\Delta$ γιατί είναι πλευρές του ρόμβου και
2) $\hat{\Delta} = \hat{B}$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του ρόμβου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν $AZ = AE$ και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.



β) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $Z\Delta = EB$ $\left(A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}B\right)$,είναι και $\Gamma Z = \Gamma E$. Επειδή $AZ = AE$ και $\Gamma Z = \Gamma E$, τα σημεία Α,Γ ισαπέχουν από τα Ζ,Ε, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΕ. Δηλαδή η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ.

γ) Επειδή τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, ισχύει ότι $MN \parallel B\Delta$. Όμως $A\Gamma \perp B\Delta$ γιατί οι διαγώνιες του ρόμβου είναι κάθετες και $ZE \perp A\Gamma$, άρα $ZE \parallel B\Delta$,άρα και $ZE \parallel MN$. Αν $\hat{B} = 60^\circ$, τότε στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΖΑ είναι $E\hat{A}B = \Delta\hat{A}Z = 30^\circ$.

Είναι $A + B = 180^\circ$ επειδή είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, άρα $A = 120^\circ$, οπότε $E\hat{A}Z = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ και επειδή $AZ = AE$, το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ το ΕΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $EN = NB = NA = \frac{AB}{2}$. Το τρίγωνο ΑΕΝ είναι ισοσκελές και έχει $A\hat{E}N = E\hat{A}N = 30^\circ$.

Τότε $Z\hat{E}N = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Όμοια $ZM = MA = M\Delta = \frac{A\Delta}{2}$, $M\hat{Z}E = 90^\circ$ και επειδή $ZE \parallel MN$, θα είναι $ZM \parallel EN$.

Άρα όταν $B \neq 60^\circ$, τότε οι ΖΜ και ΕΝ δεν είναι παράλληλες και το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι τραπέζιο.

Επειδή $ZM = \frac{A\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = EN$, το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ΄ ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

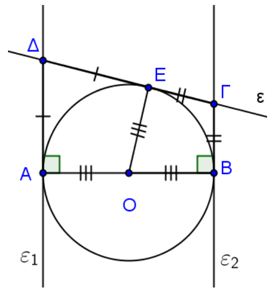
α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

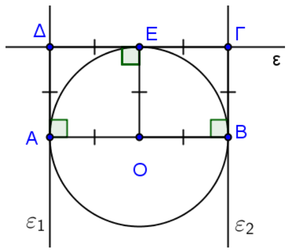
Λύση



α) i. Είναι $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Έστω ότι οι ευθείες ΓΔ, ΑΒ είναι παράλληλες. Τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και μία ορθή γωνία, οπότε θα είναι ορθογώνιο.

Τότε επειδή $OE \perp B\Gamma$ και $OE = OA = OB = R$, τα τετράπλευρα ΑΟΕΔ και ΕΟΒΓ θα είναι τετράγωνα, οπότε τα τόξα ΑΕ και ΕΒ θα είναι ίσα, δηλαδή το Ε θα είναι μέσο του τόξου ΑΒ που δεν ισχύει. Άρα στη περίπτωση που το Ε δεν είναι μέσο του τόξου ΑΒ, οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται, οπότε το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.



ii. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα, ισχύει ότι $\Delta A = \Delta E$ και $\Gamma E = \Gamma B$. Είναι $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = B\Gamma + A\Delta$

β) Το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο από προηγουμένως. Επειδή τα ΑΟΕΔ και ΕΟΒΓ είναι ίσα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$OE = OA = A\Delta = \Delta E = E\Gamma = B\Gamma = OB = R$.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta = 2R + R + 2R + R = 6R$

1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.

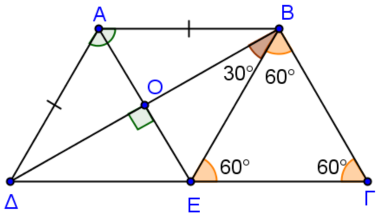
α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

Λύση

α) Επειδή $AB = A\Delta$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΒΔ είναι ίσες. Δηλαδή $A\Delta B = AB\Delta$.



Όμως $AB\Delta = B\Delta E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $A\Delta B = B\Delta E$, επομένως η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία Δ.

β) Αρχικά πρέπει το ΑΒΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο. Από το Β φέρουμε παράλληλη στην ΑΔ. Το σημείο τομής της με την ΓΔ είναι το Ε, γιατί το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές του, τις ΑΒ,ΑΔ, ίσες οπότε είναι ρόμβος.

γ) $BOE = 90^\circ$ (Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα)

Είναι $BA\Delta = AB\Gamma = 120^\circ$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου. Οι γωνίες ΑΒΓ και ΒΓΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές.

Είναι $AB\Gamma + B\Gamma E = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ$.

Επειδή $B\Gamma = BE = A\Delta$ και $\Gamma = 60^\circ$, το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισόπλευρο, άρα $EB\Gamma = BE\Gamma = 60^\circ$. Είναι $ABE = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ και επειδή η ΒΕ είναι διαγώνιος του ρόμβου, διχοτομεί τη γωνία ΑΒΕ. Άρα $OBE = 30^\circ$ και τότε $OB\Gamma = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΟΒΕ έχουμε:

$OEB + OBE = 90^\circ \Leftrightarrow OEB + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow OEB = 60^\circ$ και $OE\Gamma = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

1757. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

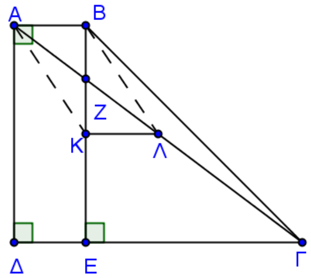
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ.

Λύση

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

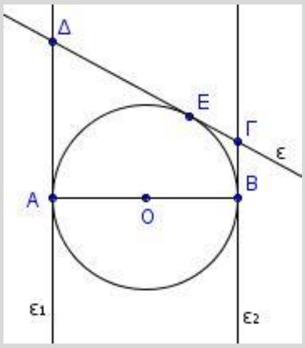


β) Είναι $\Delta E = AB$ και $A\Delta = BE$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΕΔ. Όμως $\Delta\Gamma = 4AB$, άρα $E\Gamma = 3AB$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = 3AB = BE$, άρα $BE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Επειδή τα Κ,Λ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΕΓΒ, ισχύει ότι $K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB$.

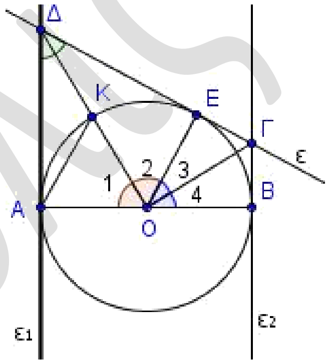
Όμως είναι και $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο ΑΚΛΒ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΛ, ΒΚ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, άρα η ΑΓ τέμνει το τμήμα ΒΚ στο μέσον του.

1758. Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ.
Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \mathrm{A}\Delta + \mathrm{B}\Gamma$
β) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.
γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.



Λύση

α) Επειδή τα ΓΕ , ΓΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς το κύκλο, είναι μεταξύ τους ίσα. Όμοια τα τμήματα ΑΔ και ΔΕ είναι ίσα. Άρα $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} + \mathrm{E}\Delta = \mathrm{B}\Gamma + \mathrm{A}\Delta$
β) Επειδή η διακεντρική ευθεία ΔΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων που καταλήγουν στα σημεία επαφής, η ΔΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΕ, άρα $\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}_2 = \omega$ και η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΟΒ, άρα $\mathrm{O}_3 = \mathrm{O}_4 = \varphi$.Είναι

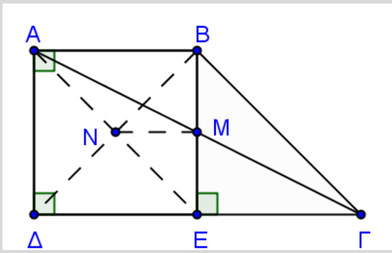


$\mathrm{O}_1 + \mathrm{O}_2 + \mathrm{O}_3 + \mathrm{O}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$

Άρα $\Gamma\mathrm{O}\Delta = \omega + \varphi = 90^\circ$.

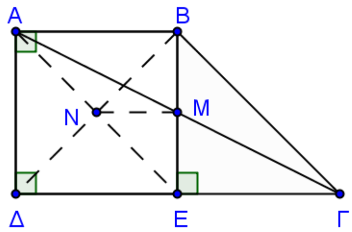
γ) Επειδή τα ΑΔ, ΒΓ είναι εφαπτομένες του κύκλου είναι κάθετες στην ΑΒ, οπότε είναι μεταξύ του παράλληλες.
- Αν το σημείο Ε δεν είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ τότε οι ΓΔ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
- Αν το Ε είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ, τότε $\mathrm{BOE} = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $\mathrm{E}\Gamma \perp \mathrm{OE}$, άρα ΕΓ//ΑΒ. Οπότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1767. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2\mathrm{AB}$ και $\hat{\mathrm{B}} = 3\hat{\Gamma}$.Φέρνουμε $\mathrm{BE} \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ.
Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $\mathrm{AE} \perp \mathrm{B}\Delta$



Λύση

α) Επειδή οι γωνίες Β,Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $\mathrm{B} + \Gamma = 180^\circ$, όμως $\mathrm{B} = 3\Gamma$ άρα
$3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

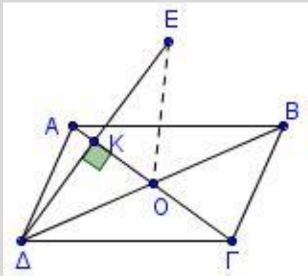


β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $\mathrm{AB} = \Delta\mathrm{E}$. Όμως $\Delta\Gamma = 2\mathrm{AB}$, άρα $\mathrm{E}\Gamma = \mathrm{AB}$. Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΕ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:
$\mathrm{EB}\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{EB}\Gamma + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{EB}\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές. Άρα $\mathrm{BE} = \mathrm{E}\Gamma$. Όμως $\mathrm{AB} = \Delta\mathrm{E} = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$, οπότε και $\mathrm{E}\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

Επειδή $ΕΓ = ΒΕ = ΑΕ = ΑΔ = ΑΒ$, το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο. Τα ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιοι του τετραγώνου, οπότε είναι κάθετα.

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $ΚΕ = ΔΚ$. Να αποδείξετε ότι:



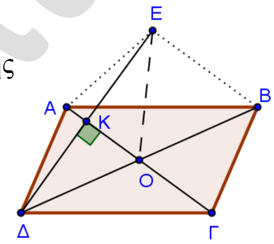
α) $ΕΟ = \frac{ΒΔ}{2}$

β) $Δ\hat{Ε}Β = 90^\circ$

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

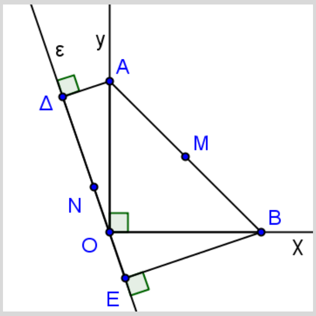
α) Στο τρίγωνο ΔΟΕ το ΟΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές . Άρα $ΕΟ = ΟΔ = \frac{ΒΔ}{2}$.



β) Στο τρίγωνο ΔΕΒ είναι $ΕΟ = \frac{ΒΔ}{2}$, δηλαδή μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $ΔΕΒ = 90^\circ$.

γ) Είναι $ΕΒ \perp ΔΕ$ και $ΓΑ \perp ΔΕ$, άρα $ΕΒ \parallel ΑΓ$ (1).
Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $ΑΕ = ΑΔ$. Όμως $ΑΔ = ΒΓ$, άρα $ΑΕ = ΒΓ$ (2).
Η ΑΕ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΒΓ(3).
Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1778. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Oy, Ox με $ΟΑ = ΟΒ$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.

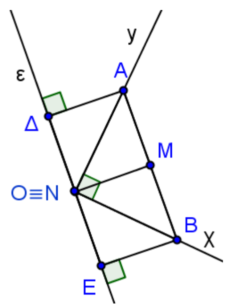
β) $ΑΔ + ΒΕ = ΔΕ$

γ) $ΜΝ = \frac{ΔΕ}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ έχουν:
1) $ΟΑ = ΟΒ$ και 2) $ΑΟΔ = ΟΒΕ$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

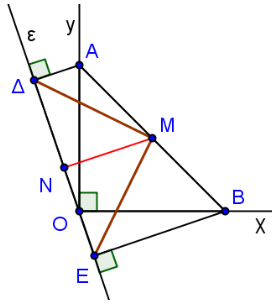


β) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα, ισχύει ότι $ΑΔ = ΟΕ$ και $ΟΔ = ΒΕ$.Είναι $ΑΔ + ΒΕ = ΟΕ + ΟΔ = ΔΕ$.

γ) Είναι $ΑΔ \perp ε$ και $ΒΕ \perp ε$, άρα $ΑΔ \parallel ΒΕ$.
Αν $ε \parallel ΑΒ$, τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ορθογώνιο και $ΑΔ = ΜΝ = ΒΕ$, οπότε

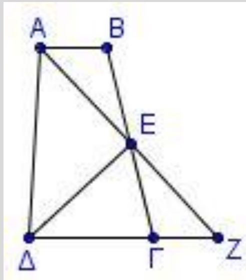
$$\frac{ΑΔ + ΒΕ}{2} = \frac{ΜΝ + ΜΝ}{2} = \frac{2ΜΝ}{2} = ΜΝ$$

Αν η ε δεν είναι παράλληλη στο ΑΒ, τότε το τμήμα ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΔΕΒ και ισχύει ότι: $MN = \frac{A\Delta + BE}{2} = \frac{\Delta E}{2}$



δ) Είναι $\Delta N = NE = MN = \frac{\Delta E}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΔΜΕ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά, δηλαδή $\Delta\hat{M}E = 90^\circ$.Επειδή $MN \parallel A\Delta$, είναι $MN \perp \Delta E$, οπότε το τμήμα ΜΝ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΔΜΕ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

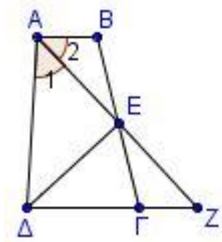
1783. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$.
Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.
β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.
γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου.



Λύση

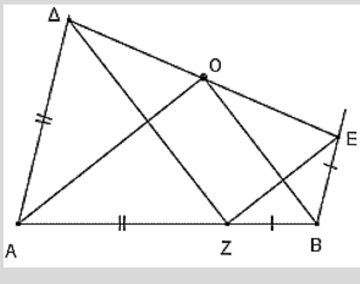
α) Είναι $A_2 = Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΖ και $A_2 = A_1$ γιατί η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, άρα $A_1 = Z$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\Delta = \Delta Z$ και $\Delta Z = \Gamma Z + \Gamma\Delta$, άρα $AB = \Gamma Z$.Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ έχουν:
1) $AB = \Gamma Z$
2) $A_2 = Z$ και
3) $B = E\Gamma Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ.
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και $BE = E\Gamma$, δηλαδή το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.



γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα έχουν και $AE = EZ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΖ, το ΔΕ είναι διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος του τριγώνου.

1784.Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ.
Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ .
Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z = \varphi$,
α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ.
β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ.
γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.



Λύση

α) Επειδή ΑΔ=ΑΒ το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΖ, οπότε $AZ\Delta = A\Delta Z$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ έχουμε:

$$\Delta AZ + AZ\Delta + A\Delta Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varphi + 2A\Delta Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2A\Delta Z = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow A\Delta Z = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

β) Οι γωνίες ΔAZ και ZBE είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε $ZBE + \Delta AZ = 180^\circ \Leftrightarrow ZBE = 180^\circ - \varphi$.

Επειδή BZ=BE το τρίγωνο ΒΖΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΖΕ, οπότε $BZE = BEZ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΖΕ έχουμε:

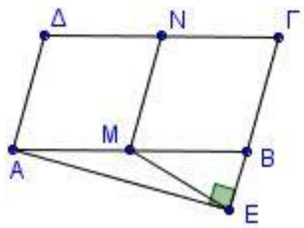
$$ZBE + EZB + BEZ = 180^\circ \Leftrightarrow \cancel{180^\circ} - \varphi + 2\widehat{EZB} = \cancel{180^\circ} \Leftrightarrow \widehat{EZB} = \frac{\varphi}{2}.$$

γ) Είναι $\Delta ZE = 180^\circ - \Delta ZA - EZB = \dfrac{180^\circ - \varphi}{2} + \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{180^\circ - \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi}}{2} = 90^\circ$.

Η ΖΟ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΕ, οπότε $ZO = \dfrac{\Delta E}{2} = \Delta O = OE$. Τα σημεία Ο, Α ισαπέχουν από τα Δ, Ζ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΔΖ. Τα σημεία Ο, Β ισαπέχουν από τα Ζ, Ε, οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΖΕ. Άρα οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

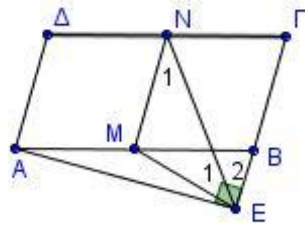
1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.
β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

Λύση



α) Επειδή τα ΜΒ και ΝΓ είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου, είναι μεταξύ τους ίσα και παράλληλα, οπότε το ΜΒΓΝ είναι παραλληλόγραμμο.
Είναι $MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΜΒΓΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

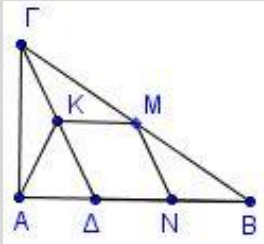
β) Αρχικά είναι $MN \parallel E\Gamma$ (1) αφού $MN \parallel B\Gamma$.
Η ΕΜ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα θα τέμνει και την ΓΝ (2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $EM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} = \Gamma N$ (3)



Από τις σχέσεις (1), (2) , (3)προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Είναι $EM = \dfrac{AB}{2} = MB = MN$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές και έχει $E_1 = N_1$. Όμως $E_2 = N_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΝ, ΒΓ που τέμνονται από την ΝΕ, άρα $E_1 = E_2$, οπότε η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ,Μ,Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με ΑΒ/2.



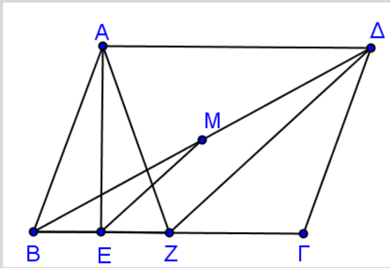
Λύση

α) Επειδή τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, ισχύει ότι $KM = \parallel \frac{B\Delta}{2}$. Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, άρα $MN = \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2}$.
Επειδή $KM \parallel \Delta N$ και $MN \parallel K\Delta$, το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.

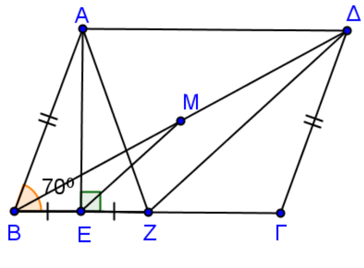
β) Επειδή $KM \parallel \Delta N$ είναι και $KM \parallel AN$ (1).
Η ΑΚ τέμνει την ΚΔ οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΜΝ (2).
Η ΑΚ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα
$AK = \frac{A\Delta}{2} = K\Delta = MN$ (3).
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Έστω δ η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ. Είναι $\delta = \frac{AN + KM}{2} \overset{KM=\frac{\Delta B}{2}=NB}{=} \frac{AN + NB}{2} = \frac{AB}{2}$

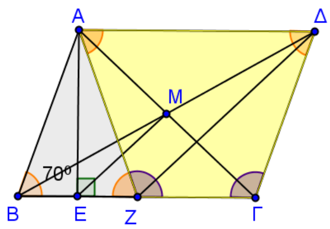
1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ.
Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ.
γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



Λύση



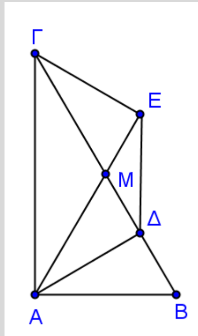
α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΑΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $AB = AZ$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα $\Gamma\Delta = AZ$ (1).
Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$ είναι και $A\Delta \parallel Z\Gamma$ (2).
Η ευθεία ΑΖ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΓΔ (3).
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Είναι $A\Delta\Gamma = B = 70^\circ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Επειδή οι γωνίες Β,Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:
$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 110^\circ$.
Επειδή το ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, δηλαδή $AZ\Gamma = \Gamma = 110^\circ$ και $ZA\Delta = \Delta = 70^\circ$

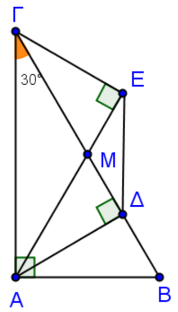
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\text{ΕΜ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$.

1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Α}} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.
Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ.
Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.
β) $\text{ΜΕ} = \text{ΜΔ} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$
γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:
$\text{Β} + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Β} = 60^\circ$. Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $\text{ΑΜ} = \text{ΜΒ} = \text{ΜΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$
Επειδή $\text{ΑΜ} = \text{ΜΒ}$ και $\text{Β} = 60^\circ$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

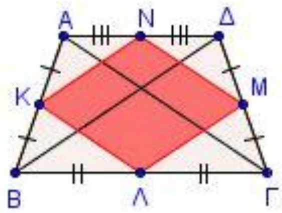


β) Το ΑΔ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διάμεσος,
δηλαδή $\text{ΜΔ} = \frac{\text{ΜΒ}}{2} = \frac{\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{2} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$. Είναι $\Gamma\text{ΜΕ} = \text{ΑΜΒ} = 60^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ είναι $\text{Μ}\Gamma\text{Ε} = 30^\circ$, άρα
$\text{ΜΕ} = \frac{\text{Μ}\Gamma}{2} = \frac{\text{Β}\Gamma}{4}$.

γ) Είναι $\text{ΕΜ}\Delta = 180^\circ - \text{ΑΜΒ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και $\text{ΜΕ} = \text{Μ}\Delta = \frac{\text{Β}\Gamma}{4}$, άρα το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:
$\text{ΜΕ}\Delta + \text{Μ}\Delta\text{Ε} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\text{Μ}\Delta\text{Ε} = 60^\circ \Leftrightarrow \text{Μ}\Delta\text{Ε} = 30^\circ$.
Οι γωνίες ΜΔΕ και Γ είναι εντός εναλλάξ των ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΓΔ και επειδή είναι ίσες, οι ευθείες ΑΓ και ΔΕ είναι παράλληλες (1).
Είναι $\Gamma\text{Ε}\Delta + \text{Ε}\Delta\text{Α} = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ > 180^\circ$, άρα οι ευθείες ΑΔ, ΓΕ δεν είναι παράλληλες (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο και επειδή $\Gamma\text{Ε}\Delta = \text{Ε}\Delta\text{Α} = 120^\circ$ το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

Λύση



α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$.
Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $\Lambda\text{Μ} = \frac{\text{Β}\Delta}{2}$.

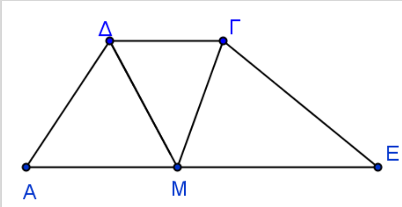
Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα $\text{ΜΝ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$.

Τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $\text{ΚΝ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}$.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι διαγώνιες του ΑΓ,ΒΔ είναι ίσες οπότε $\text{ΚΛ} = \text{ΛΜ} = \text{ΜΝ} = \text{ΚΝ}$ και το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος αφού όλες του οι πλευρές είναι ίσες.

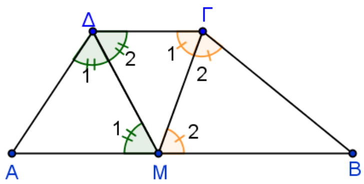
β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος, τότε με βάση τα προηγούμενα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες. Αυτή η ιδιότητα όμως από μόνη της δεν καθιστά το τετράπλευρο ισοσκελές τραπέζιο.

1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ}$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ} + \text{ΒΓ}$.
Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου.



Λύση

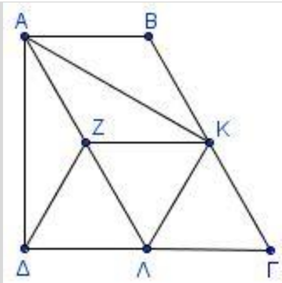
α) Είναι $\text{Μ}_1 = \text{Δ}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΔΜ και $\text{Δ}_1 = \text{Δ}_2$ γιατί η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ, άρα $\text{Μ}_1 = \text{Δ}_1$.
Το τρίγωνο ΑΔΜ έχει δύο γωνίες του ίσες , οπότε είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\text{ΑΔ} = \text{ΑΜ}$.



β) Είναι $\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ} + \text{ΒΓ} \overset{\text{ΑΔ}=\text{ΑΜ}}{=} \text{ΑΜ} + \text{ΒΓ}$, όμως $\text{ΑΒ} = \text{ΑΜ} + \text{ΜΒ}$, άρα $\text{ΜΒ} = \text{ΒΓ}$, οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές και έχει $\text{Μ}_2 = \text{Γ}_2$.

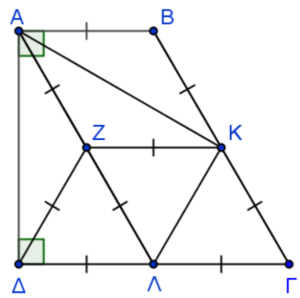
γ) Είναι $\text{Μ}_2 = \text{Γ}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΓΜ και επειδή $\text{Μ}_2 = \text{Γ}_2$ είναι και $\text{Γ}_1 = \text{Γ}_2$, άρα η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Δ}} = 90^\circ\right)$ με $\text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒ}$ και Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ.
Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\text{ΒΓ} = 2\text{ΔΖ}$.
β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) $\text{Α}\hat{\text{Κ}}\text{Λ} = 90^\circ$.



Λύση

α) Είναι $\text{ΓΛ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2} = \frac{2\text{ΑΒ}}{2} = \text{ΑΒ}$ και $\text{ΓΛ} \parallel \text{ΑΒ}$, άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\text{ΑΛ} = \text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒ}$.
Τα τετράπλευρα ΑΒΚΖ και ΖΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμα αφού οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες. Άρα $\text{ΒΚ} = \text{ΑΖ}$ και $\text{ΚΓ} = \text{ΖΛ}$, γιατί είναι απέναντι πλευρές στα παραλληλόγραμμα. Όμως $\text{ΒΚ} = \text{ΚΓ}$, άρα και $\text{ΑΖ} = \text{ΖΛ}$, δηλαδή το Ζ είναι μέσο του ΑΛ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\text{ΔΖ} = \frac{\text{ΑΛ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΑΛ} = 2\text{ΔΖ} \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 2\text{ΔΖ}$.

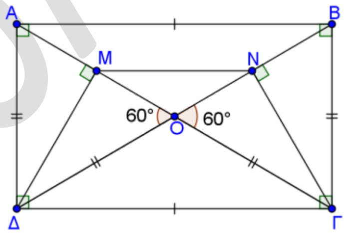


β) Είναι $ZK = AB = \Lambda\Gamma$, $K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = AB$, $Z\Lambda = \frac{A\Lambda}{2} = AB$, οπότε το τετράπλευρο ΖΚΓΛ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Είναι $ZK = Z\Lambda = AZ = \frac{A\Lambda}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΑΚΛ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή, δηλαδή

1893. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.
ii. $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



α) i. Οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιο του ορθογωνίου, άρα είναι ίσες και διχοτομούνται στο Ο, δηλαδή $AO = O\Delta$ και το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές. Όμως $\hat{AO\Delta} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο. Το ΔΜ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΟΑ.

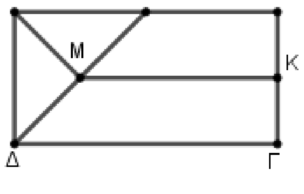
ii. Είναι $AM = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$.

β) Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΓΝ είναι ύψος του, οπότε είναι και διάμεσος του. Στο τρίγωνο ΟΑΒ τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MN \parallel AB \Leftrightarrow MN \parallel \Gamma\Delta$ (1).
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ είναι ίσα γιατί έχουν:
1) $\hat{MO\Delta} = \hat{NO\Gamma} = 60^\circ$ σαν κατακορυφήν γωνίες
2) $O\Delta = O\Gamma$ (μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου).
Οπότε $\Delta M = \Gamma N$ (2).

Έχουμε $\hat{M\Delta\Gamma} + \hat{N\Delta\Gamma} < \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα οι ευθείες ΔΜ, ΝΓ τέμνονται (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.
α) Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ.
γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ.

Λύση



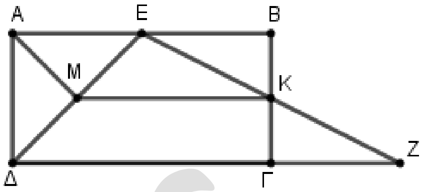
α) Επειδή ΑΕ= ΑΔ το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή $AM \perp \Delta E$.

β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο . Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ, οπότε το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο .

Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ. Η διάμεσος ΜΚ του τραπεζίου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή

$$\mathrm{MK} = \frac{\mathrm{EB} + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{MK} = \mathrm{EB} + \Gamma\Delta \ \ (1)$$

Όμως ΓΔ=ΑΒ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΔ = ΑΕ (3), από υπόθεση. Επίσης, ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ (4).
Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ – ΑΕ = 2ΑΒ – ΑΔ (5).

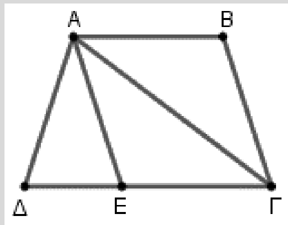


γ) Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επειδή τα Μ,Κ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΕΔΖ είναι

$$\mathrm{MK} = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{MK} = \Delta Z \Leftrightarrow 2\mathrm{AB} - \mathrm{A}\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{AB} - \mathrm{A}\Delta = \mathrm{AB} + \Gamma Z \Leftrightarrow 2\mathrm{AB} - \mathrm{AB} - \mathrm{A}\Delta = \Gamma Z \Leftrightarrow \mathrm{AB} - \mathrm{A}\Delta = \Gamma Z$$

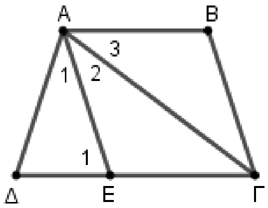
13539.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

Λύση

α) Επειδή οι ΑΕ, ΑΓ τριχοτομούν την Α, είναι $A_1 = A_2 = A_3 = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$. Οι γωνίες Α και Δ του τραπεζίου είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε:

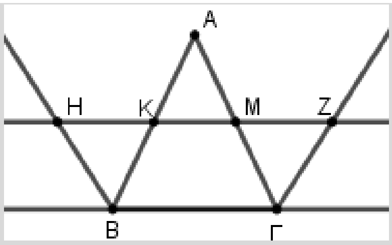


$A + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 108^\circ + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 72^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:
$A_1 + \Delta + AE\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 72^\circ + E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow E_1 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

β) i. Επειδή $E_1 = \Delta$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, ισχύει ότι $B\Gamma E = \Delta = 72^\circ$.
Είναι $B\Gamma E = E_1$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ, ΑΕ που τέμνονται από την ΓΔ, άρα ΒΓ//ΑΕ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $A_2 = A_3$, η διαγώνιος ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ διχοτομεί μια γωνία του, οπότε το ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

13838.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

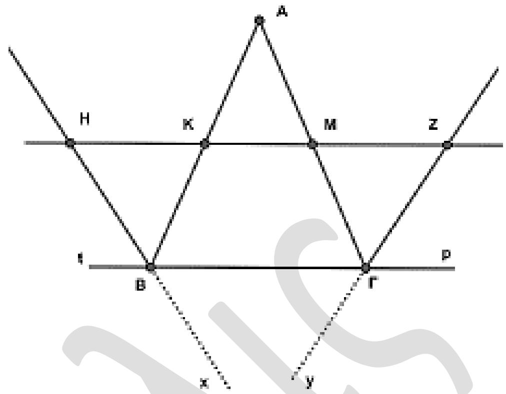


α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς

ΚΜ//ΒΓ. Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο αφού έχει 2 πλευρές παράλληλες (ΚΜ, ΒΓ) και οι άλλες δύο πλευρές του (ΒΚ και ΓΜ) τέμνονται ως μέρη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ=ΑΓ και τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς ΚΒ=ΜΓ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ), άρα το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού οι μη παράλληλες πλευρές του ΚΒ και ΜΓ είναι ίσες μεταξύ τους.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και ισχύει ΚΜ//ΒΓ, άρα και ΗΖ//ΒΓ (αφού τα σημεία Η και Ζ βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ, Μ). Επιπλέον οι ΒΗ και ΓΖ τεμνόμενες από τη ΒΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους $\left(\Gamma Bx \text{ και } B\Gamma y\right)$ με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

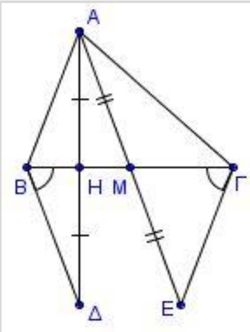
$\Gamma Bx = HBt$ (ως κατακορυφήν) και $HBt = \dfrac{B_{\varepsilon\xi}}{2}$

$B\Gamma y = Z\Gamma\rho$ (ως κατακορυφήν) και $Z\Gamma\rho = \dfrac{\Gamma_{\varepsilon\xi}}{2}$ αλλά επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι ίσες γωνίες B και Γ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $B_{\varepsilon\xi}$ και $\Gamma_{\varepsilon\xi}$ είναι αμβλείες δηλαδή ισχύει: $B_{\varepsilon\xi} < 180^\circ \Leftrightarrow \dfrac{B_{\varepsilon\xi}}{2} < 90^\circ$ και $\Gamma_{\varepsilon\xi} < 180^\circ \Leftrightarrow \dfrac{\Gamma_{\varepsilon\xi}}{2} < 90^\circ$

$\dfrac{B_{\varepsilon\xi}}{2} + \dfrac{\Gamma_{\varepsilon\xi}}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow HBt + Z\Gamma\rho < 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma Bx + B\Gamma y < 180^\circ$.

Οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται συνεπώς το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΓ και ΖΗ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες B και Γ είναι προσκείμενες στη βάση ΒΓ συνεπώς είναι ίσες, δηλαδή $B = \Gamma$ άρα και $B_{\varepsilon\xi} = \Gamma_{\varepsilon\xi} \Leftrightarrow \dfrac{B_{\varepsilon\xi}}{2} = \dfrac{\Gamma_{\varepsilon\xi}}{2} \Leftrightarrow KBH = M\Gamma Z$. Επίσης ισχύει $\Gamma BH = B\Gamma Z$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών $B + KBH$ και $\Gamma + M\Gamma Z$). Το τραπέζιο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες του ΓBH και $B\Gamma Z$ ίσες.

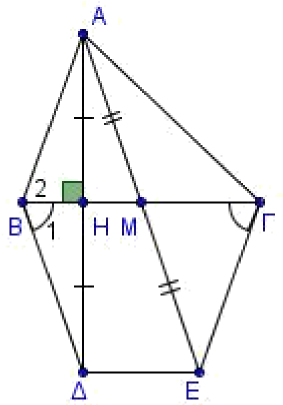
14885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα $H\Delta = AH$ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα $ME = AM$.
Να αποδείξετε ότι:
α) i. $AB = \Gamma E$
ii. $AB = B\Delta$
β) $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$
γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.
ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ έχουν:
1) $AM = ME$
2) $BM = M\Gamma$ (Μ μέσο του ΒΓ)
3) $AMB = \Gamma ME$ ως κατακορυφήν
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = \Gamma E$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$.

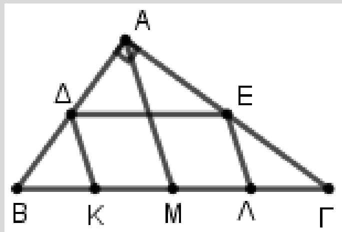


β) Το τμήμα ΒΗ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΔ (αφού είναι ύψος και διάμεσος του), άρα $B_1 = B_2$. Όμως $B_2 = ΒΓΕ$ αφού τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, άρα $B_1 = ΒΓΕ$.

γ) i. Τα Η,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα $ΗΜ \parallel ΔΕ$, οπότε και $ΒΓ \parallel ΔΕ$ (3).

ii. Οι γωνίες B_2 και $ΒΓΕ$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΒ, ΓΕ που τέμνονται από την ΒΓ και αφού είναι ίσες, οι ευθείες ΑΒ και ΓΕ είναι παράλληλες.
Επειδή από το (β) σκέλος είναι $ΒΔ = ΓΕ$ (5), από τις σχέσεις (3), (5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}ΒΓ$.



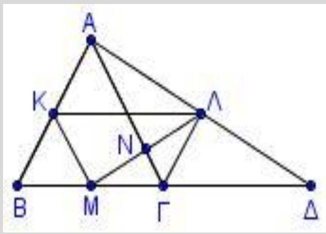
Λύση

α) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ \Leftrightarrow ΔΕ \parallel ΚΛ$ και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Όμως $ΚΛ = ΚΜ + ΜΛ = \frac{ΒΜ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΔΕ$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΔΕΛΚ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο ΒΑΜ τα Κ,Δ είναι μέσα δύο πλευρών, οπότε $ΚΔ \parallel ΑΜ$ και $ΚΔ = \frac{ΑΜ}{2}$. Επειδή οι ΑΔ και ΚΜ τέμνονται στο Β, το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο. Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αν δ η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ, ισχύει ότι:

$$δ = \frac{ΚΔ + ΑΜ}{2} = \frac{\frac{ΑΜ}{2} + ΑΜ}{2} = \frac{\frac{3}{2}ΑΜ}{2} = \frac{3}{4}ΑΜ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}ΒΓ = \frac{3}{8}ΒΓ$$

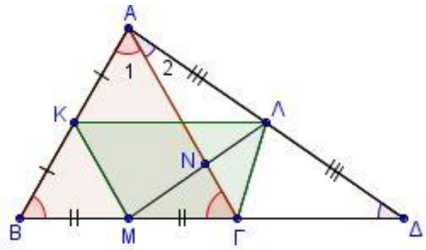
14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60°, άρα $Β = Α_1 = ΑΓΒ = 60^\circ$.
Επειδή $ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $Α_2 = Δ$.
Η γωνία ΑΓΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $ΑΓΒ = Α_2 + Δ \Leftrightarrow 60^\circ = 2Δ \Leftrightarrow Δ = 30^\circ = Α_2$

Είναι $B\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$



β) i. Επειδή τα σημεία Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, είναι $K\Lambda \parallel B\Delta \Leftrightarrow K\Lambda \parallel M\Gamma$ (1) και

$K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = 2M\Gamma$.

Τα σημεία Λ,Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα

$\Lambda\Gamma \parallel AB$ και $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$

Επειδή η ΚΜ τέμνει την ΑΒ θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΓΛ (2). Τα σημεία Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$. Είναι

$AB = A\Gamma \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = KM$ (3).

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ii. Είναι $\Gamma\Lambda = KM = \frac{AB}{2} = KB = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΚΜΒ είναι ισόπλευρο, οπότε $K\hat{M}B = 60^\circ$. Οι γωνίες ΜΓΛ και Β είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΛ που τέμνονται από την ΒΓ, οπότε είναι παραπληρωματικές.

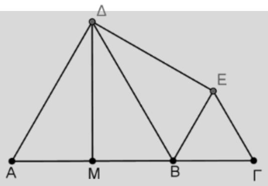
Δηλαδή $M\hat{\Gamma}\Lambda + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{\Gamma}\Lambda + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{\Gamma}\Lambda = 120^\circ$.

Επειδή $M\Gamma = \Gamma\Lambda$, το τρίγωνο ΜΓΛ είναι ισοσκελές με βάση την ΜΛ, άρα $\Gamma\hat{M}\Lambda = \Gamma\hat{\Lambda}M$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΓΛ έχουμε: $\Gamma\hat{M}\Lambda + \Gamma\hat{\Lambda}M + M\hat{\Gamma}\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma\hat{M}\Lambda + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\Gamma\hat{M}\Lambda = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{M}\Lambda = 30^\circ$.

Είναι $B\hat{M}K + K\hat{M}\Lambda + \Gamma\hat{M}\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 60^\circ + K\hat{M}\Lambda + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow K\hat{M}\Lambda = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

34320. Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ = 2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ.

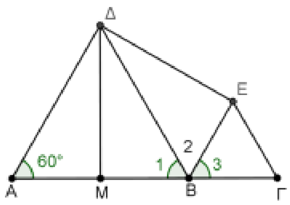
β) τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα.

γ) $\Delta\hat{M}B + \Delta\hat{E}B = 180^0$.

Λύση

α) Αφού τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ είναι ισόπλευρα τότε $\hat{A} = \hat{B}_3 = 60^o$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται από την ΑΓ., οπότε ΑΔ//ΒΕ. Επίσης οι ΔΕ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες. Πράγματι έστω ότι ΔΕ/ΑΒ τότε το ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμο άρα ΑΔ = ΒΕ. Όμως είναι και ΑΒ = ΑΔ. Επίσης ΒΕ = ΒΓ άρα ΑΒ = ΒΓ πράγμα άτοπο αφού ΑΒ = 2ΒΓ.

Άρα το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.



β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

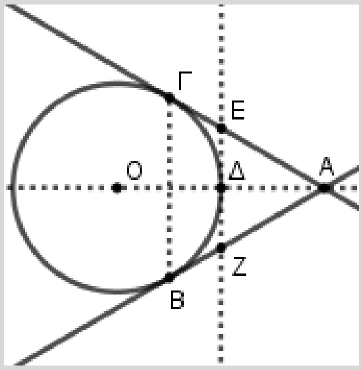
1) ΔΒ κοινή πλευρά

2) ΒΜ = ΕΒ αφού Μ μέσο ΑΒ άρα $BM = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = BE$

3) $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 60^o$ αφού $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^o$ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_3 = 60^o$
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από Π-Γ-Π.

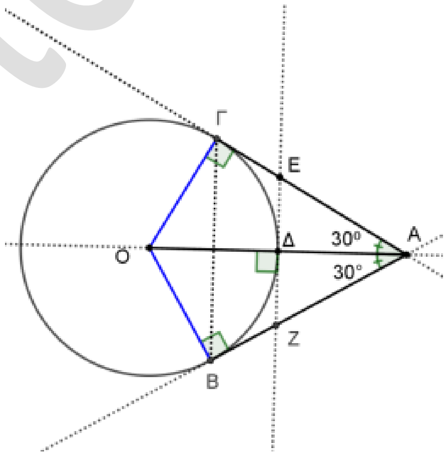
γ) Το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΔ, αφού Μ μέσο από τα δεδομένα, άρα θα είναι και ύψος του τριγώνου, οπότε $\Delta\hat{M}B = 90^o$. Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα θα είναι και $\Delta\hat{E}B = \Delta\hat{M}B = 90^o$, άρα $\Delta\hat{E}B + \Delta\hat{M}B = 180^o$

34324.Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία Β, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ να είναι 60^o. Έστω ότι η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΟΑ=2ρ.
β) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.
γ) ΑΖ = 2ΖΒ.
δ) το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ οι οποίες θα είναι κάθετες στις εφαπτομένες στα σημεία Β και Γ. Η διακεντρική ευθεία ΟΑ διχοτομεί την γωνία $B\hat{A}\Gamma$, δηλαδή $B\hat{A}O = \Gamma\hat{A}O = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} = 30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ η γωνία $B\hat{A}O = 30^o$, άρα
$OB = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB \Leftrightarrow OA = 2\rho$.

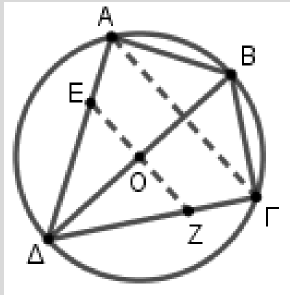


β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα θα είναι κάθετη στη ακτίνα ΟΔ που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής Δ, άρα είναι και κάθετη στην ΟΑ. Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με την γωνία της κορυφής να είναι 60 μοίρες άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το Ζ, οπότε ΖΒ = ΖΔ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΖΕ το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:
$Z\Delta = \frac{EZ}{2} \Leftrightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AZ = 2ZB$

δ) Η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής που έχει άκρα τα σημεία επαφής, δηλαδή ΑΟ⊥ ΒΓ. Επίσης είναι και ΑΟ ⊥ ΖΕ, αφού η διακεντρική ΑΟ είναι φορέας του ύψος ΑΔ στην πλευρά ΖΕ του ισοπλεύρου τριγώνου. Άρα ΕΖ // ΒΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία, και τα τμήματα ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι τραπέζιο. Τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, οπότε ΕΓ = ΕΔ και επειδή ΖΔ = ΕΔ από σχέση (1) , προκύπτει ότι ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.

34328. Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία Α, Β, Γ και Δ κύκλου (Ο, ρ), διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ, με τη ΒΔ να διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΒΓ. Έστω ότι η κάθετη στη ΒΔ στο σημείο Ο τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, οι γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές και η γωνία του $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας του $\hat{\Delta}$.



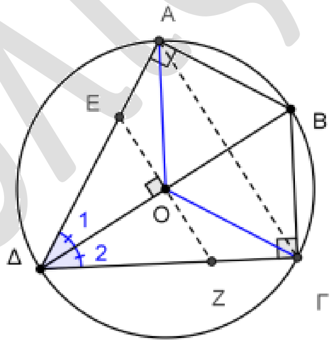
α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.
ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.
iii. το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι γωνίες Α και Γ του ΑΒΓΔ είναι ορθές και η γωνία του Β είναι διπλάσια της γωνίας του Δ. Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει ότι:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^o \Leftrightarrow 90^o+90^o+2\hat{\Delta}+\hat{\Delta}=360^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=60^o$ οπότε $\hat{B}=120^o$.



β) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90^o$, την πλευρά ΒΔ κοινή και τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ίσες. Συνεπώς είναι ίσα, ως ορθογώνια, άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Άρα η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=\frac{\hat{\Delta}}{2}=30^o$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB=\frac{\Delta B}{2}=\rho$ (2), αφού η ΔΒ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ), γιατί από τα δεδομένα έχουμε ότι διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου. Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ είναι $B\Gamma=\frac{\Delta B}{2}=\rho$ (3). Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ρ (4). Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

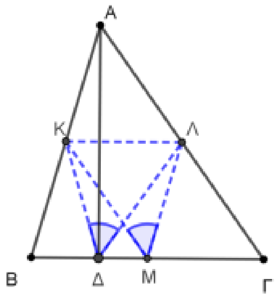
iii. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΟ οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΟ τέμνονται κάθετα, δηλαδή $A\Gamma \perp BO$ (5). Επίσης είναι $EZ \perp BO$ (6) από τα δεδομένα. Οπότε είναι ΑΓ // ΕΖ ως κάθετες στην ίδια ευθεία και επειδή οι φορείς των τμημάτων ΑΕ, ΓΖ τέμνονται στο σημείο Δ, το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΖ είναι ισοσκελή, γιατί η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας τους $\hat{\Delta}$ αλλά και ύψος στις πλευρές ΑΓ και ΕΖ αντίστοιχα (σχέσεις (5), (6)) οπότε ΑΔ = ΓΒ και ΕΔ = ΖΔ. Είναι ΑΕ = ΑΔ – ΕΔ = ΓΔ – ΖΔ = ΖΓ, άρα το τραπέζιο ΑΓΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

34331. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΚΛ // ΒΓ
β) i. ΜΛ = ΚΔ
ii. Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Οι γωνίες $K\hat{\Delta}\Lambda$ και $K\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.



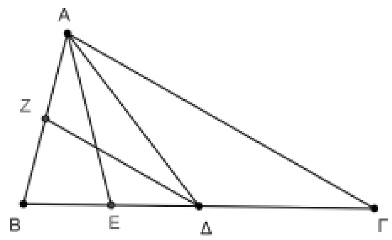
β) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Άρα, $ΛΜ = \frac{AB}{2}$ (2), επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι $ΔΚ = \frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΚΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΒ. Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι ΛΜ = ΚΔ. (4)

ii. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο Μ της ΒΓ ταυτιζόταν με το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, πράγμα άτοπο γιατί από την υπόθεση είναι ΑΒ < ΑΓ. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο. Επειδή τα Λ, Μ ενώνουν μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, θα είναι ΛΜ // ΑΒ και η ΔΚ δεν είναι παράλληλη στην ΑΒ (αφού την τέμνει στο Κ). Συνεπώς οι απέναντι πλευρές ΛΜ και ΚΔ του ΚΛΜΔ δεν είναι παράλληλες. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΚΛ // ΒΓ, οπότε ΚΛ // ΔΜ. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τραπέζιο, γιατί έχει μόνο δυο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Και επειδή από τη σχέση (4) είναι ΛΜ = ΚΔ, άρα το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

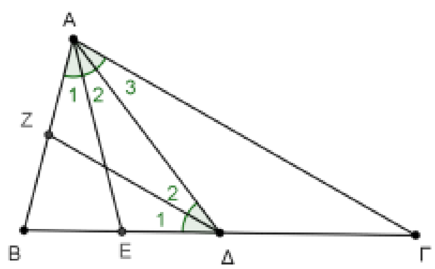
γ) Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν, τις πλευρές ΚΔ και ΛΜ ίσες (από 4), τις πλευρές ΚΜ και ΔΛ ίσες ως διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου ΚΛΜΔ και την πλευρά ΚΛ κοινή. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες. Άρα και $K\hat{Δ}Λ = K\hat{M}Λ$ ως οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά ΚΛ.

34333. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο
σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα,
β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}Γ$,
γ) το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

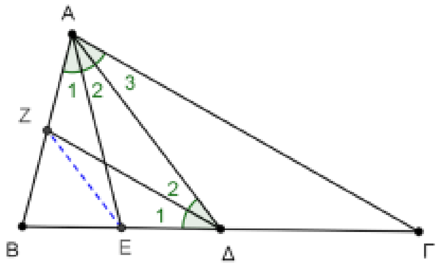


α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:
1) ΑΒ = ΒΔ, ως μισά του ΒΓ, αφού ΒΓ = 2ΑΒ (υπόθεση) και ΒΓ = 2ΒΔ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).
2) ΒΕ = ΒΖ, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.
3) $\hat{B}$ κοινή γωνία.
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{Δ}_1$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΔ, οπότε $B\hat{A}Δ = B\hat{Δ}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.
Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:
$B\hat{A}Δ - \hat{A}_1 = B\hat{Δ}A - \hat{Δ}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_2 = \hat{Δ}_2$ (3). Επίσης, $\hat{Δ}_2 = \hat{A}_3$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ. Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}Γ$.

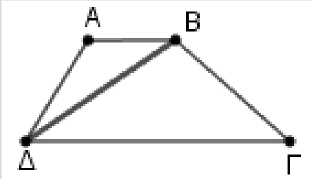
γ) Φέρνουμε το τμήμα ΖΕ, το οποίο ενώνει τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΒΔ και ΒΑ αντίστοιχα του τριγώνου ΒΑΕ, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του ΑΔ. Στο τετράπλευρο ΑΔΕΖ οι πλευρές του ΑΖ, ΔΕ δεν είναι παράλληλες καθώς οι προεκτάσεις τους προς τα σημεία Ζ, Ε αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Β. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές ΑΔ, ΖΕ. Είναι $B\hat{\Delta}A = B\hat{A}\Delta$ από σχέση (2), άρα το τραπέζιο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει τις γωνίες τις προσκείμενες στη βάση του ΑΔ ίσες.



36172. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

β) τη γωνία $\hat{A}$.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΔΓ. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ έχουμε:

$$B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

β) Είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B + B\hat{\Delta}\Gamma = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$ και οι γωνίες $\hat{A}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ οπότε είναι παραπληρωματικές.

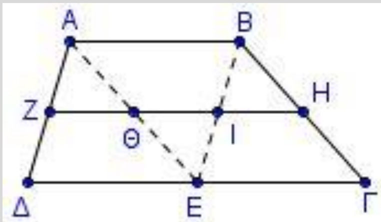
Άρα $\hat{A} = 180^\circ - A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

37080. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.
Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα.
Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

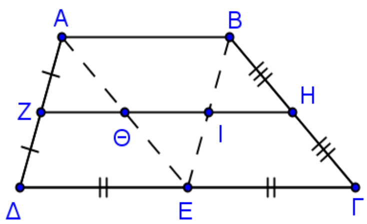
β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και Ε μέσο του ΓΔ, είναι $AB = \Delta E = E\Gamma$.
Επίσης $AB \parallel \Gamma E$ αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και $Z\Theta \parallel \Delta E$, άρα το Θ είναι μέσο του ΑΕ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ το Η είναι μέσο της ΒΓ και $IH \parallel E\Gamma$, άρα το Ι είναι μέσο του ΒΕ.

γ) Επειδή η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου, ισχύει ότι: $ZH = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + 2AB}{2} = \frac{3}{2}AB$

37084. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.

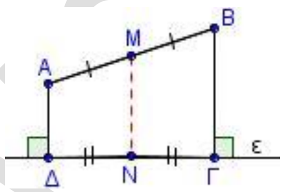
α) Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας: 1) $ΑΔ < ΒΓ$ 2) $ΑΔ = ΒΓ$.

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

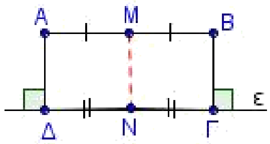


α) i. Επειδή $ΑΔ \perp ε$ και $ΒΓ \perp ε$, είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$.

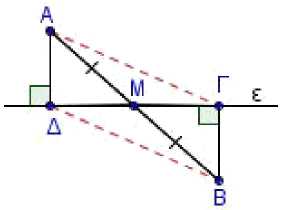
1) Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε οι ΑΒ, ΓΔ δεν είναι παράλληλες γιατί αν ήταν , το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του ΑΔ, ΒΓ θα ήταν ίσες, που δεν ισχύει.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

2) Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και επειδή $Δ = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

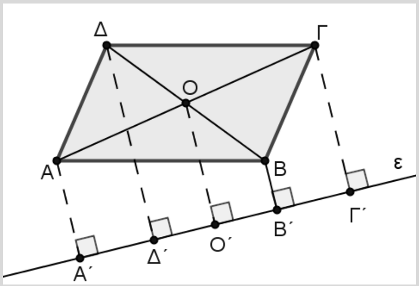


ii. Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του και είναι: $ΜΝ = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$. Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ θα είναι ορθογώνια και τότε $ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν τις πλευρές ΑΜ και ΜΒ ίσες και τις γωνίες ΑΜΔ και ΒΜΓ ίσες ως κατακορυφήν. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $ΑΔ = ΒΓ$.Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

37086. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.



α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $ΑΑ' = 3$, $ΒΒ' = 2$, $ΓΓ' = 5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄.

β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

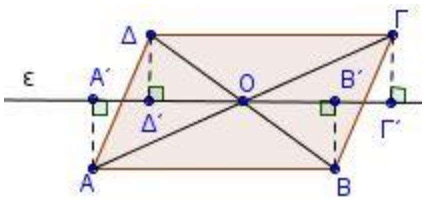
α) Είναι $ΑΑ' \perp ε, ΒΒ' \perp ε, ΓΓ' \perp ε, ΔΔ' \perp ε$ και $ΟΟ' \perp ε$, άρα τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄, ΟΟ΄ είναι παράλληλα.

Αν η ε ήταν παράλληλη στην ΑΓ, τότε το ΑΑ΄Γ΄Γ΄ θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του ΑΑ΄ και ΓΓ΄ θα ήταν ίσες, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η ε δεν είναι παράλληλη στην ΑΓ.

i. Στο τραπέζιο ΑΑ΄Γ΄Γ το ΟΟ΄ είναι διάμεσος, άρα $ΟΟ' = \frac{ΑΑ' + ΓΓ'}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$.

ii. Στο τραπέζιο ΒΒ΄Δ΄Δ το ΟΟ΄ είναι διάμεσος, άρα

$$OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$$



β) Αν η ε είναι παράλληλη στις ΓΔ και ΑΒ και διέρχεται από το κέντρο Ο, τότε η ε θα είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ,ΓΔ, τα τετράπλευρα ΑΑ΄Β΄Β και ΔΔ΄Γ΄Γ είναι ίσα ορθογώνια και οι αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ είναι ίσες.

37089. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:

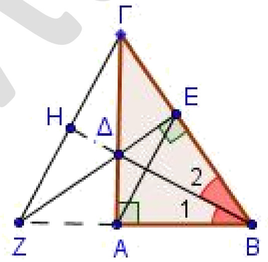
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.

δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΔ κοινή και
2) $B_1 = B_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της Β

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε είναι $AB = BE$ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:
1) $AB = BE$ και
2) τη γωνία Β κοινή

Άρα τα δύο τρίγωνα μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, οπότε είναι ίσα.

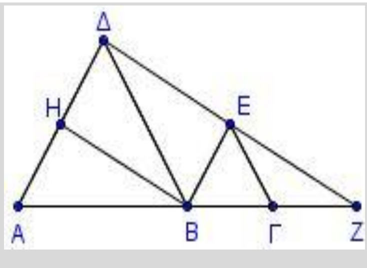
γ) $BA = BE$ και $\Delta A = \Delta E$ (Δ σημείο της διχοτόμου ΒΔ) .Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα είναι και $B\Gamma = BZ$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. Το τμήμα ΒΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΒΓΖ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΓΖ.

δ) Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, είναι $AE \parallel \Gamma Z$ (1)

Είναι $B\Gamma = BZ$ και $BE = AB$ άρα και $B\Gamma - BE = BZ - AB \Leftrightarrow E\Gamma = AZ$ (2)

Επειδή οι ευθείες ΓΕ και ΑΖ τέμνονται στο Β, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37098. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την (ε) στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.

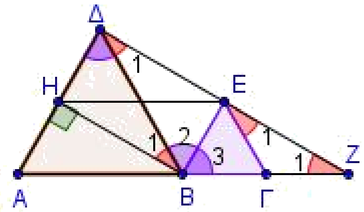
β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι ισόπλευρα, οι γωνίες τους είναι ίσες με 60°.Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΗ είναι ύψος, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος. Δηλαδή $B_1 = 30^\circ$.

Είναι $B_2 = 180^\circ - AB\Delta - B_3 = = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, άρα $HBE = B_1 + B_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$



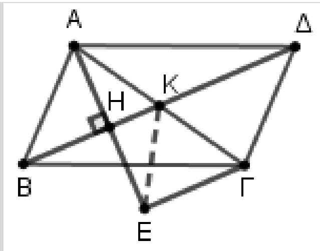
Τα τρίγωνα ΔΗΒ και ΔΕΒ έχουν:
1) την πλευρά ΔΒ κοινή
2) $A\Delta B = B_2 = 60^\circ$ και
3) $\Delta H = \dfrac{A\Delta}{2} = \dfrac{AB}{2} = B\Gamma = BE$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα
$\Delta EB = BH\Delta = 90^\circ$.
Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο, είναι $H\Delta E = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta B + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ$.
Επειδή $\Delta BA = E\Gamma B = 60^\circ$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΓΕ, ΒΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οι ευθείες ΕΓ και ΒΔ είναι παράλληλες. Είναι $E_1 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΔ, ΕΓ που τέμνονται από την ΔΕ. Η γωνία ΕΓΖ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, άρα $E\Gamma Z = BE\Gamma + B_3 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.Από το άθροισα γωνιών στο τρίγωνο ΕΓΖ, έχουμε $Z + E_1 + E\Gamma Z = 180^\circ \Leftrightarrow Z + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z = 30^\circ$.
Επειδή $Z = E_1$ το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισοσκελές.

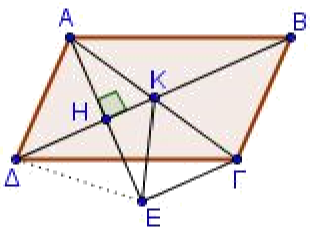
γ) Επειδή $\Delta_1 = Z = 30^\circ$, το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές και το ΒΕ είναι διχοτόμος του, άρα είναι και διάμεσος. Δηλαδή το Ε είναι μέσο του ΔΖ.
Τα Η, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΑΖ, άρα $HE \parallel AZ \Leftrightarrow HE \parallel A\Gamma$ (1)
Η ΕΓ τέμνει την ΒΕ άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΑΗ (2). Είναι
$E\Gamma = B\Gamma = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{A\Delta}{2} = AH$ (3)
Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37099. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH = HE$.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.
γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

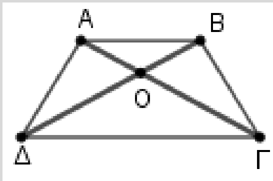
α) Στο τρίγωνο ΑΚΕ το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή $EK = AK = \dfrac{A\Gamma}{2}$, στο τρίγωνο ΑΕΓ η διάμεσός του ΕΚ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $AE\Gamma = 90^\circ$.

γ) Είναι $HK \perp AE$ και $E\Gamma \perp AE$, άρα $HK \parallel E\Gamma \Leftrightarrow B\Delta \parallel E\Gamma$ (1).
Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\Delta E = A\Delta$. Όμως $A\Delta = B\Gamma$, άρα $\Delta E = B\Gamma$ (2).
Η ΔΕ τέμνει την ΑΔ, άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΒΓ (3). Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37103. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.
β) Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Γ$.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

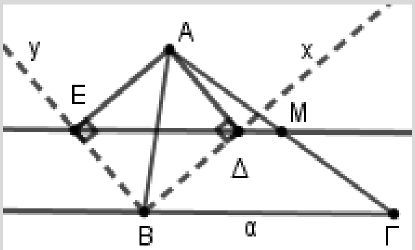
α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ έχουν:
1) $ΑΔ = ΒΓ$
2) τη πλευρά ΔΓ κοινή και
3) $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα και έχουν $ΟΔΓ = ΟΓΔ$

Επειδή $ΟΔΓ = ΟΓΔ$ το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές και ΟΔ=ΟΓ. Επειδή ΑΓ = ΒΔ και ΟΓ = ΟΔ είναι και $ΑΓ - ΟΓ = ΒΔ - ΟΔ \Leftrightarrow ΟΑ = ΟΒ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΑΒ έχουν:
1) τη πλευρά ΑΒ κοινή
2) $ΑΔ = ΒΓ$ και
3) $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ΔΑΒ = ΑΒΓ$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:
$ΔΑΒ + ΑΒΓ + ΑΔΓ + ΒΓΔ = 360^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2ΔΑΒ + 2ΑΔΓ = 360^\circ \Leftrightarrow ΔΑΒ + ΑΔΓ = 180^\circ$.
Οι γωνίες ΔΑΒ και ΑΔΓ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΒ,ΓΔ είναι παράλληλες (1). Αν οι ΑΔ,ΒΓ ήταν και αυτές παράλληλες τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε $ΑΒ = ΓΔ$ που είναι άτοπο. Άρα οι ΑΒ,ΓΔ τέμνονται (2). Επειδή $ΑΔ = ΒΓ$, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

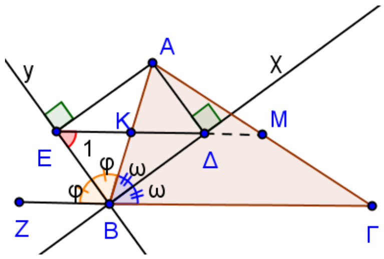
37107. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο.
β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.
γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3α}{4}$, όπου $α = ΒΓ$.

Λύση

α) Επειδή οι Βx και Βy είναι διχοτόμοι των γωνιών Β και $Β_{εξ}$, είναι $ΓΒΔ = ΔΒΑ = ω$ και
$ΑΒΕ = ΕΒΖ = φ$. Είναι $ΓΒΔ + ΔΒΑ + ΑΒΕ + ΕΒΖ = 180^\circ \Leftrightarrow$
$ω + ω + φ + φ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ω + 2φ = 180^\circ \Leftrightarrow$
$ω + φ = 90^\circ$, άρα $ΕΒΔ = ω + φ = 90^\circ$.
Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει τρείς ορθές και είναι ορθογώνιο.

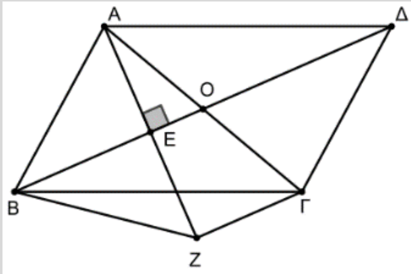


β) Οι ΑΒ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες, άρα και $ΚΕ = ΚΒ$ ως μισά των διαγωνίων. Το τρίγωνο ΚΕΒ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΕ, άρα $ΚΕΒ = ΚΒΕ = φ$, άρα και $ΚΕΒ = ΕΒΖ = φ$.

Οι γωνίες όμως $ΚΕΒ$ και $ΕΒΖ$ είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΒ, άρα οι ΔΕ,ΒΓ είναι παράλληλες. Οι ΑΒ,ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου οπότε διχοτομούνται στο Κ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Κ είναι μέσο της ΑΒ και η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα η ΔΕ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Επειδή τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $ΚΜ \parallel ΒΓ$ (1) και $ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$.
Επειδή οι ΒΚ, ΓΜ τέμνονται στο Α, από την (1) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Αν δ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε: $δ = \frac{ΚΜ + ΒΓ}{2} = \frac{\frac{α}{2} + α}{2} = \frac{\frac{3α}{2}}{2} = \frac{3α}{4}$.

37114.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.
Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ.
Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.
β) ΖΓ = 2ΟΕ.
γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Το ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΖ, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

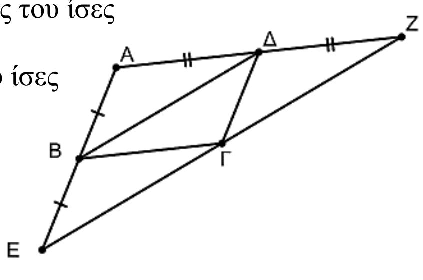
β) Το ΟΕ ενώνει τα μέσα Ο και Ε των πλευρών ΑΓ και ΑΖ αντίστοιχα, στο τρίγωνο ΑΖΓ άρα
$ΟΕ = \frac{ΖΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΓ = 2ΟΕ$.

γ) Επειδή το ΟΕ ενώνει τα μέσα Ο και Ε των πλευρών ΑΓ και ΑΖ αντίστοιχα στο τρίγωνο ΑΖΓ θα ισχύει ότι ΟΕ // ΖΓ, άρα και ΒΔ // ΖΓ. Η ΒΖ τέμνει την ΑΒ άρα τέμνει και την παράλληλή της ΓΔ, οπότε οι πλευρές ΒΖ και ΓΔ δεν είναι παράλληλες. Άρα το ΒΔΖΓ είναι τραπέζιο. Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Άρα ΒΖ = ΑΒ αλλά και ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε ΒΖ = ΓΔ. Άρα το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

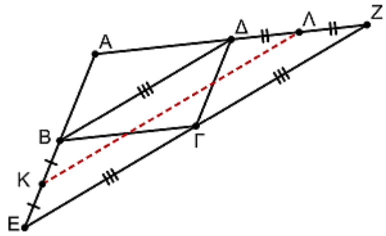
37115.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.
ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.
β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ // ΔΒ και $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$.

Λύση

α) i. Επειδή ΒΕ=//ΔΓ το τετράπλευρο ΒΔΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή ΔΖ=//ΒΓ το τετράπλευρο ΒΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

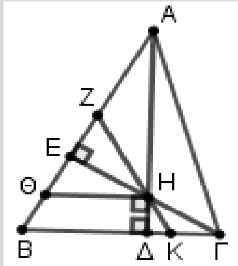


ii. Επειδή το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΓΖ==//ΒΔ (1).
Επειδή το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΓΕ=//ΒΔ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΓΖ//ΓΕ, άρα τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.



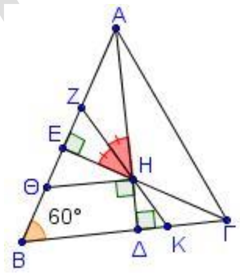
β) Τα Β, Δ είναι μέσα των ΑΕ, ΑΖ αντίστοιχα, οπότε ΒΔ//ΕΖ.
Επειδή επιπλέον οι ΒΕ, ΔΖ τέμνονται, το τετράπλευρο ΒΕΖΔ είναι τραπέζιο.
Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα ΚΛ//ΔΒ και
$$\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΔΒ}+\text{ΕΖ}}{2} = \frac{\text{ΔΒ}+\text{ΕΓ}+\text{ΓΖ}}{2} = \frac{\text{ΔΒ}+\text{ΔΒ}+\text{ΔΒ}}{2} = \frac{3}{2}\text{ΔΒ}.$$

37118. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Β}} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\text{ΖΗ} = 2\text{ΖΕ}$
β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.
γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

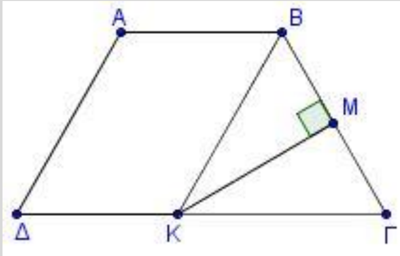
α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:
$\text{ΒΑΔ}+\text{Β} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{ΒΑΔ}+60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \text{ΒΑΔ} = 30^\circ$.
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τρίγωνο ΑΕΗ έχουμε:
$\text{ΕΗΑ}+\text{ΕΑΗ} = 90^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow \text{ΕΗΑ}+30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \text{ΕΗΑ} = 60^\circ$.
Επειδή η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΗΕ, είναι $\text{ΕΗΖ} = 30^\circ$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΗΖ ισχύει ότι $\text{ΕΖ} = \frac{\text{ΖΗ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΖΗ} = 2\text{ΕΖ}$



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΗ έχουμε:
$\text{ΒΑΔ}+\text{ΑΘΗ} = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \text{ΑΘΗ} = 90 \Leftrightarrow \text{ΑΘΗ} = 60$
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου Ε έχουμε:
$\text{ΑΘΗ}+\text{ΕΗΘ} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \text{ΕΗΘ} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{ΕΗΘ} = 30^\circ$
Επειδή $\text{ΕΗΘ} = \text{ΕΗΖ} = 30^\circ$, η ΗΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΘΗΖ και επειδή είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Όμως $\text{ΑΘΗ} = 60$, οπότε το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $\text{ΘΗ} \perp \text{ΑΔ}$ και $\text{ΒΚ} \perp \text{ΑΔ}$, οπότε $\text{ΘΗ} \parallel \text{ΒΚ}$ (1).
$\text{ΔΗΚ} = \text{ΑΗΕ} = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΗΔΚ είναι: $\text{ΔΗΚ}+\text{ΗΚΔ} = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \text{ΗΚΔ} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{ΗΚΔ} = 60^\circ$.
Επειδή οι ΗΚ, ΒΘ τέμνονται στο Ζ, το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο. Επειδή $\text{ΗΚΔ} = \text{Β} = 60^\circ$, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση ΒΚ του τραπεζίου είναι ίσες, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

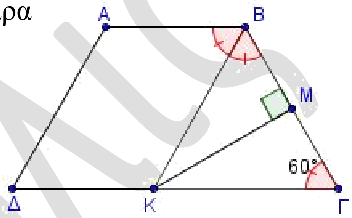
37128. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ και $ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.
ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

Λύση

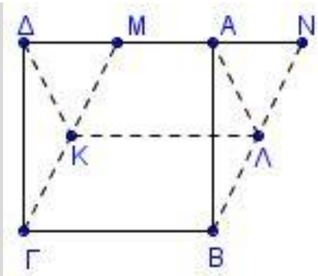
α) Επειδή οι γωνίες Β και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $Β + Γ = 180^\circ$. Όμως $Β = 2Γ$, άρα $2Γ + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 3Γ = 180^\circ \Leftrightarrow Γ = 60^\circ$ και $Β = 120^\circ$. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $Α = Β = 120^\circ$ και $Δ = Γ = 60^\circ$.



β)i. Επειδή η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, είναι
$ΑΒΚ = ΚΒΓ = 60^\circ$
Στο τρίγωνο ΒΚΓ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60°, οπότε και η τρίτη γωνία του είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Τότε $ΚΓ = ΒΓ = ΑΒ = ΑΔ$ και επειδή $ΒΓ = \frac{ΓΔ}{2}$, είναι και $ΔΚ = ΒΓ = ΑΒ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος του, άρα θα είναι και διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

37129. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Είναι $ΜΝ = ΜΑ + ΑΝ = = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΑΔ}{2} = ΑΔ = ΒΓ$ και $ΜΝ \parallel ΒΓ$,αφού $ΑΔ \parallel ΒΓ$, άρα το τετράπλευρο ΜΝΒΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τμήματα ΜΓ και ΝΒ είναι ίσα και παράλληλα γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΜΝΒΓ, άρα και τα ΜΚ και ΝΛ είναι ίσα και παράλληλα, γιατί $ΜΚ = \frac{ΜΓ}{2}$ και $ΝΛ = \frac{ΝΒ}{2}$.
Το τετράπλευρο ΜΚΝΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $ΜΝ \parallel ΚΛ$ και $ΜΝ = ΚΛ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, όμως $ΜΝ = ΑΔ$, άρα τα τμήματα ΑΔ και ΚΛ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

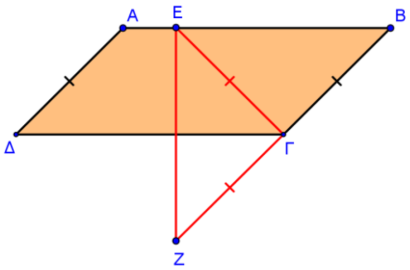
γ) Το ΑΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΝΑΒ, άρα

$A\Lambda = \frac{BN}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK$ (1)
Είναι $MA \parallel K\Lambda$ (2) αφού $MN \parallel K\Lambda$. Η ΜΚ τέμνει τη ΔΚ άρα θα τέμνει και κάθε παράλληλή της, άρα θα τέμνει και την ΑΛ (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37130.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ και $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

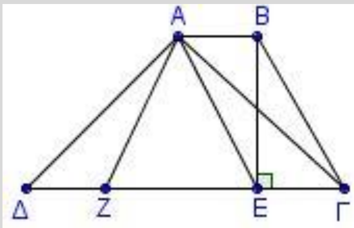
α) Αφού ΓΖ=ΒΓ το Γ μέσο της ΒΖ. $E\Gamma = B\Gamma = \frac{BZ}{2}$ (διάμεσος ίση με το μισό απέναντι πλευράς), οπότε το τρίγωνο ΖΕΒ είναι ορθογώνιο.



β) ΑΕ// ΔΓ και η ΕΓ τέμνει την ΒΓ άρα θα τέμνει και την παράλληλη της ΑΔ. Οπότε το ΑΕΓΔ είναι τραπέζιο .
Αλλά ΑΔ=ΒΓ(απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $B\Gamma = \Gamma E$, άρα $A\Delta = \Gamma E$,οπότε το ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

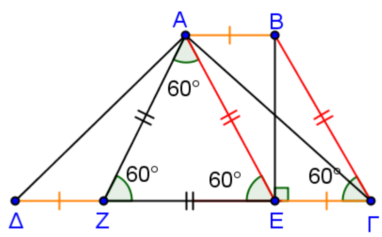
γ) ΑΔ // = ΓΖ άρα το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

37134. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$.
Αν η γωνία Γ είναι 60° και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο.
γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.



Λύση

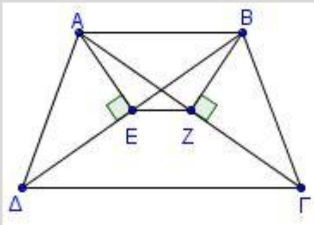
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε: $E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 30^\circ$ άρα $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = AB$.
Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΕΓ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Είναι $ZE = \Delta\Gamma - \Delta Z - E\Gamma = 4AB - AB - AB = 2AB$.
Όμως $B\Gamma = 2AB$ και $B\Gamma = AE$, άρα $ZE = AE$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. Είναι $A\hat{E}Z = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΕ,ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, οπότε το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, ως ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60°.

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ έχουν:
1) $\Delta Z = \Gamma E$
2) $AZ = AE$ γιατί το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο και
3) $A\hat{Z}\Delta = A\hat{E}\Gamma = 120^\circ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

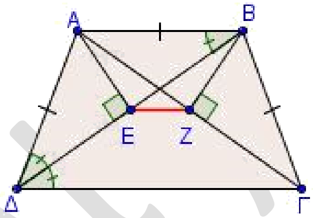
37135. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
β) $ΑΕ = ΒΖ$.
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Λύση

α) Επειδή $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$, τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή με βάσεις ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
Τα ΑΕ, ΒΖ είναι ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις των ισοσκελών τριγώνων ΑΔΒ και ΑΒΓ, οπότε είναι και διάμεσοί τους, δηλαδή τα σημεία Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

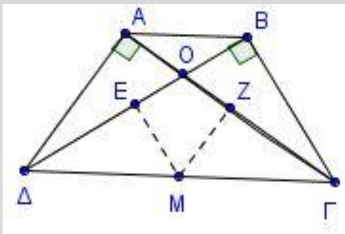


β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ έχουν:
1) την πλευρά ΑΒ κοινή και
2) $ΑΖ = ΑΕ$ γιατί είναι μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ισοσκελούς τραπεζίου
Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα. Οπότε έχουν και $ΑΕ = ΒΖ$ (1).

γ) Τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου, άρα $ΕΖ \parallel ΑΒ \parallel ΓΔ$ (2).
Είναι $ΑΕΖ + ΒΖΕ = 90^\circ + ΒΕΖ + 90^\circ + ΑΖΕ > 180^\circ$, άρα οι ΑΕ και ΒΖ τέμνονται προς το μέρος των Ε και Ζ (3).
Από τις σχέσεις (1),(2),(3), προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, ισχύει ότι: $ΑΔΒ = ΑΒΔ$. Όμως $ΑΒΔ = ΒΔΓ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $ΑΔΒ = ΒΔΓ$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

37139. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ.
Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:



α) $ΜΕ = ΜΖ$.
β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ.
γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.
δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

Λύση

α) Τα Μ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε $ΕΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (1). Τα Ζ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΑΔ, άρα $ΜΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ και $ΜΖ \parallel ΑΔ$ (2).
Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $ΒΓ = ΑΔ$ οπότε από τις (1),(2) προκύπτει ότι $ΜΕ = ΜΖ$.

β) Επειδή $ΜΖ \parallel ΑΔ$ και $ΑΔ \perp ΑΓ$ είναι και $ΜΖ \perp ΑΓ$.

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ έχουν:
1) $ΜΕ = ΜΖ$

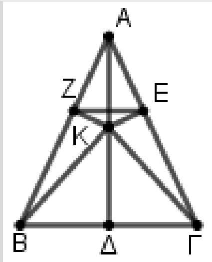
2) $Μ\Delta = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΓΔ και

3) $\Delta Ε = \frac{\Delta Β}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΖΓ$ γιατί οι ΑΓ,ΒΔ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα έχουν και $Ο\Delta Γ = ΟΓ\Delta$. Τότε όμως το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές και $Ο\Delta = ΟΓ$. Επειδή όμως είναι $\Delta Ε = ΖΓ$, θα είναι και $ΟΕ = ΟΖ$.
Αλλά $ΜΕ = ΜΖ$, δηλαδή η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

37161. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και ΑΔ διάμεσος.

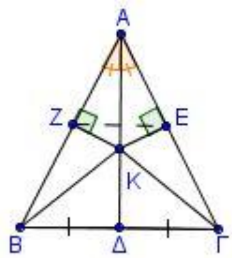


Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:
≪ Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $Α\overset{\Delta}{Β}Κ$ και $Α\overset{\Delta}{Γ}Κ$ έχουν
1. $ΒΚ = ΚΓ$
2. $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Κ$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
3. $Α\hat{Β}Κ = Α\hat{Γ}Κ$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.≫
Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία - Πλευρά - Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

Λύση



α) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ύψος και διάμεσος του. Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, άρα $ΖΚ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ ισαπέχει από τα Β, γ, δηλαδή ΚΒ=ΚΓ, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΕΚ έχουν την πλευρά ΑΚ κοινή και ΚΖ=ΚΕ, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα. Άρα ΑΖ=ΑΕ και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $ΑΖΕ = ΑΕΖ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε:

$$ΑΖΕ + ΑΕΖ + Α = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΑΖΕ = 180^\circ - Α \Leftrightarrow ΑΖΕ = \frac{180^\circ - Α}{2}$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$Α + Β + Γ = 180^\circ \Leftrightarrow 2Β = 180^\circ - Α \Leftrightarrow Β = \frac{180^\circ - Α}{2}.$$

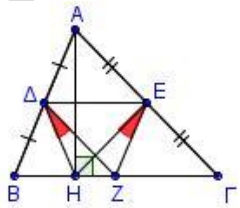
Είναι $ΑΖΕ = Β$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ,ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οι ευθείες ΖΕ και ΒΓ είναι παράλληλες (2). Επειδή οι ΒΖ,ΓΕ τέμνονται στο Α, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $ΑΚΒ = ΑΚΓ$. Τώρα τα τρίγωνα $Α\overset{\Delta}{Β}Κ$ και $Α\overset{\Delta}{Γ}Κ$ έχουν
1. $ΒΚ = ΚΓ$

2. $AKB = AK\Gamma$
3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων και εφαρμόζεται πλέον το κριτήριο ΓΠΓ.

37162. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες.
γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

Λύση



α) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα και $\Delta E \parallel HZ$ (1).
Επειδή τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $EZ \parallel AB$ και $EZ = \frac{AB}{2}$ (2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (3).
Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι $EZ = H\Delta$ (4).
Η ΗΒ τέμνει την ΑΒ, οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΕΖ (5). Από τις (1), (4),(5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ έχουν:
1) $EZ = H\Delta$
2) τη πλευρά ΗΖ κοινή και
3) $\Delta HZ = EZH$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου

Βάση του κριτηρίου ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και $H\Delta Z = HEZ$

γ) Είναι $\Delta EH = EHZ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ,ΗΖ που τέμνονται από την ΕΗ. Επίσης $E\Delta H = \Delta EZ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπεζίου και $H\Delta Z = HEZ$ άρα και $E\Delta H - H\Delta Z = \Delta EZ - HEZ \Leftrightarrow E\Delta Z = \Delta EH = EHZ$.

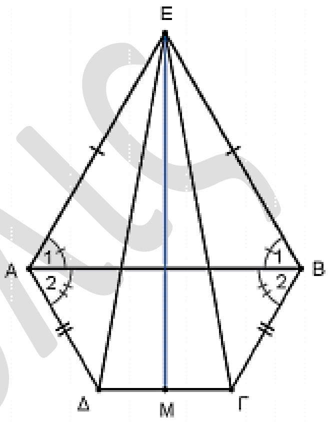
3º Θέμα

12418. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΒ.

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ έχουν:

- ΕΑ = ΕΒ γιατί το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές
- ΑΔ = ΒΓ γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές
- $ΕΑΔ = ΕΒΓ$ γιατί είναι αθροίσματα ίσων γωνιών ($Α_1 = Β_1$ και $Α_2 = Β_2$)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΕΒΓ είναι ίσα άρα έχουν $ΑΕΔ = ΓΕΒ$ (1) και ΕΔ = ΕΓ. Επειδή το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές η διάμεσος ΕΜ που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διχοτόμος του, δηλαδή

$ΔΕΜ = ΜΕΓ$ (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει:

$ΑΕΔ + ΔΕΜ = ΓΕΒ + ΜΕΓ \Leftrightarrow ΑΕΜ = ΜΕΒ$ άρα η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΒ.